



Commande h_∞ à base de modèles non entiers

Lamine Fadiga

► To cite this version:

Lamine Fadiga. Commande h_∞ à base de modèles non entiers. Physique [physics]. Université de Bordeaux, 2014. Français. NNT : 2014BORD0090 . tel-01176378

HAL Id: tel-01176378

<https://theses.hal.science/tel-01176378>

Submitted on 15 Jul 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE PRÉSENTÉE
POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR
SPÉCIALITÉ : AUTOMATIQUE, PRODUCTIQUE, SIGNAL ET IMAGE

Par
Vakanga Mahmoud Lamine FADIGA

COMMANDE H_∞ À BASE DE MODÈLES NON ENTIERS

Sous la direction de : Jocelyn SABATIER
(co-directeur : Christophe FARGES)

Soutenue le 12 juin 2014

Membres du jury :

M. DUGARD, Luc
M. GARCIA, Germain
M. ZASADZINSKI, Michel
M. M'SAAD, Mohamed
M. OUSTALOUP, Alain
M. SABATIER, Jocelyn
M. FARGES, Christophe

Directeur de recherche, GIPSA-Lab Grenoble
Professeur, INSA Toulouse
Professeur, Université de Lorraine
Professeur, ENSICAEN Caen
Professeur, IPB – ENSEIRB MATMECA Bordeaux
Professeur, IUT Bordeaux, IMS – UMR 5218 CNRS
Maître de Conférences, Université de Bordeaux, IMS

Président
rapporteur
rapporteur
Examineur
Examineur
Directeur
Co-encadrant

Titre : Commande H_∞ à base de modèles non entiers

Résumé :

Les études menées permettent d'étendre la méthodologie de commande H_∞ aux modèles décrits par des équations différentielles faisant intervenir des ordres de dérivation non entiers. Deux approches sont proposées. La première consiste à réécrire le modèle non entier comme un modèle entier incertain afin de pouvoir utiliser les méthodes de commande H_∞ développées pour les modèles entiers. La seconde approche consiste à développer des conditions LMI spécifiques aux modèles non entiers à partir de leur pseudo représentation d'état. Ces deux approches sont appliquées à l'isolation vibratoire d'un pont.

Mots clés : Dérivation non entière, Commande H_∞ , Pseudo représentation d'état, Inégalités matricielles linéaires, Inégalités de Riccati, Lemme de de Kalman-Yakubovič-Popov, Représentation diffusive, Modèles entiers incertains

Title: H_∞ control of fractional order models

Abstract :

The general theme of the work enables to extend H_∞ control methodology to fractional order models. Two approaches are proposed. The first one consists in rewriting the fractional order model as an uncertain integer order model in order to use existing H_∞ control methods for integer order models. The second approach consists in developing specific LMI conditions for fractional order models based on their pseudo state space representation. These two approaches are applied to the vibratory isolation of a bridge.

Keywords : Fractional differentiation, H_∞ control, Pseudo state space representation, Linear matrix inequalities, Riccati's inequalities, de Kalman-Yakubovič-Popov lemma, Diffusive representation, Uncertain integer order models

Unité de recherche

Laboratoire de l'Intégration du Matériau au Système (IMS)- UMR 5218 CNRS, Pôle P3S, 351 cours de la libération, 33405 TALENCE cedex, France

“La connaissance, c’est partager le savoir qui nous fait grandir.”

Olivier Lockert

“Le savoir ne réside pas seulement dans les livres, les laboratoires, les fiches, mais dans et par l’amitié, celle des hommes, celle des bêtes et des étoiles.”

Claude Roy

Remerciements

Ce mémoire est le résultat d'un peu plus de trois années passées au Laboratoire IMS, pôle P3S, au sein de l'équipe CRONE. La possibilité d'y faire un doctorat est née d'une initiative de M. Jocelyn Sabatier et de M. Christophe Farges. Ce travail m'a permis d'approfondir mes connaissances sur un aspect important de l'automatique, à savoir la commande robuste de systèmes, et de découvrir la dérivation non entière et ses nombreuses applications.

Je tiens à remercier, en premier lieu, mes encadrants : Jocelyn Sabatier, directeur de ma thèse et Christophe Farges, mon co-encadrant, pour m'avoir confié ce projet. Qu'ils soient assurés de ma sincère reconnaissance pour m'avoir donné l'opportunité de faire une thèse. Je les remercie également pour la rigueur, l'attention et les nombreux conseils qu'ils m'ont prodigués, pour leur disponibilité et la confiance qu'ils m'ont témoignée, ainsi que pour leur sympathie.

Je remercie également M. Pierre Melchior et M. Patrick Lanusse, Maîtres de Conférences à l'Institut Polytechnique de Bordeaux (IPB/enseirb-matmeca) pour m'avoir donné goût à l'automatique et l'envie de faire une thèse.

Je tiens à remercier les membres du jury de thèse, à commencer par M. Germain Garcia et M. Michel Zasadzinski, qui ont eu la charge de rapporter mes travaux et qui m'ont fait des remarques très constructives pour la présentation de ces travaux. M. Luc Dugard, qui m'a fait l'honneur de présider le jury, et qui a manifesté un intérêt au sujet de ma thèse que j'ai beaucoup apprécié. C'est un plaisir pour moi que M. Mohamed M'Saad ait accepté de participer au jury avec toute l'attention qu'il a manifestée.

Je remercie également le professeur Alain Oustaloup pour son bon vivant et pour nos nombreuses conversations autour d'un bon repas.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du groupe Automatique, et en particulier aux membres de l'équipe CRONE tout autant pour leur gentillesse que pour leur proximité qui ont permis une ambiance de travail remarquable : Mathieu P. notre irremplaçable chef des doctorants, Asma son acolyte et notre otaku adorée, Benjamin pour son infinie sympathie, Mathieu C. mon meilleur ennemi, Sergey et Elena notre

couple russe préféré, ainsi que tous les autres membres qui m'ont accompagné. Je vous suis fortement reconnaissant pour tous ces bons moments passés avec vous.

Enfin, je tiens à remercier mes parents qui ont toujours cru en mes capacités et qui m'ont toujours soutenu dans tout ce que j'ai entrepris. Je les remercie infiniment pour les sacrifices qu'ils ont dû faire afin de me permettre de poursuivre mes études en France.

Table des matières

Remerciements	5
Introduction générale	7
1 Dérivation non entière et modèles non entiers	15
1.1 – Introduction	17
1.2 – Définitions	18
1.2.1 – Intégration non entière	18
1.2.1.1 – Définition	18
1.2.1.2 – Propriétés	18
1.2.1.3 – Sens géométrique et physique de l'intégration non entière .	19
1.2.1.4 – Transformée de Laplace de l'intégrale non entière d'une fonction	20
1.2.2 – Dérivation non entière	21
1.2.2.1 – Définition au sens de <i>Riemann-Liouville</i>	21
1.2.2.2 – Définition au sens de <i>Caputo</i>	22
1.2.2.3 – Définition au sens de <i>Grünwald</i>	22
1.2.2.4 – Condition d'existence	24
1.2.2.5 – Propriétés principales	24
1.2.2.6 – Transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction temporelle	25
1.2.3 – Caractérisation fréquentielle d'un dérivateur et d'un intégrateur d'ordre non entier réel	26
1.3 – Modèles non entiers	28

1.3.1 – Modèles dynamiques, linéaires et invariants dans le temps (LTI) . . .	28
1.3.2 – Equation différentielle d’ordres non entiers	30
1.3.3 – Pseudo représentation d’état	30
1.3.4 – Matrice de transfert d’un modèle non entier commensurable	33
1.3.5 – Décomposition d’un modèle non entier en un modèle entier et un modèle parabolique	34
1.3.5.1 – Décomposition modale d’un modèle non entier	34
1.3.5.2 – Calcul des modes	35
1.3.5.3 – Représentation d’un modèle non entier par l’association d’un modèle parabolique et d’un modèle LTI entier	36
1.3.6 – Simulation d’un modèle non entier en utilisant l’approximation par pôles et zeros récurrents	41
1.4 – Conclusion	44
2 Formalisation des problèmes	47
2.1 – Introduction	49
2.2 – Définition et caractérisation de la stabilité des modèles non entiers	50
2.2.1 – Stabilité Entrée-Sortie	50
2.2.1.1 – Définition	50
2.2.1.2 – Caractérisation à partir de la matrice de transfert	51
2.2.1.3 – Caractérisation à partir de la pseudo représentation d’état	52
2.2.2 – Stabilité interne	53
2.2.2.1 – Cas particulier des modèles entiers	53
2.2.2.2 – Généralisation aux modèles non entiers	55
2.3 – Performances des modèles non entiers	55
2.3.1 – Définitions des normes L_∞ et H_∞	56
2.3.2 – Interprétation physique	57
2.4 – Formalisation des problèmes	57
2.4.1 – Nature du correcteur	58
2.4.1.1 – Retour d’état	58
2.4.1.2 – Retour de sortie dynamique	59

2.4.2 – Propriétés attendues pour le système bouclé et formulation des problèmes	60
2.4.2.1 – Stabilité	60
2.4.2.2 – Performances	61
2.5 – Approches proposées	63
3 Commande H_∞ basée sur la décomposition d'un modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique	65
3.1 – Introduction	67
3.2 – Approximation d'un modèle non entier en le décomposant en une partie exponentielle et une partie apériodique	68
3.2.1 – Réponse impulsionnelle et représentation d'un modèle non entier . .	68
3.2.2 – Traitement de la partie apériodique comme une incertitude	70
3.2.3 – Réduction de l'incertitude par inclusion d'une partie du comportement apériodique dans le modèle nominal	71
3.2.3.1 – Détermination d'un majorant de H_{ap}^1	71
3.2.3.2 – Détermination d'un majorant de H_{ap}^3	73
3.2.3.3 – Détermination d'un majorant de $H_{ap}^2(s)$	73
3.2.3.4 – Définition du modèle entier incertain	77
3.2.3.5 – Exemple	80
3.3 – Commande H_∞ d'un modèle non entier représenté à partir de sa partie exponentielle et de sa partie apériodique	85
3.3.1 – Analyse en stabilité et en performances	85
3.3.2 – Commande H_∞	86
3.4 – Application	88
3.5 – Conclusion	92
4 Commande H_∞ basée sur des modèles non entiers décrits par leur pseudo représentation d'état	95
4.1 – Introduction	97
4.2 – Méthodes LMI pour l'analyse en stabilité des systèmes dynamiques non entiers	98

4.2.1 – Le critère de <i>Lyapunov</i>	98
4.2.2 – Méthodes LMI pour l’analyse en stabilité des modèles non entiers	99
4.2.2.1 – Cas $1 < \nu < 2$	100
4.2.2.2 – Cas $0 < \nu < 1$	101
4.3 – Méthodes LMI pour l’évaluation de la norme H_∞ des modèles non entiers	104
4.3.1 – Méthodes basées sur l’utilisation d’une pseudo matrice hamiltonienne	105
4.3.1.1 – Définition de la pseudo matrice hamiltonienne d’un modèle non entier	105
4.3.1.2 – Formulations LMI basées sur une inégalité de Riccati	110
4.3.1.3 – Formulations LMI basées sur l’utilisation des régions GLMI	119
4.3.2 – Méthodes basées sur l’utilisation du lemme KYP généralisé	121
4.3.2.1 – Méthode basée sur la définition de la norme L_∞	122
4.3.2.2 – Méthodes basées sur la définition de la norme H_∞	125
4.3.3 – Comparaison des conditions LMI proposées	130
4.3.4 – Exemples	131
4.3.4.1 – Exemple 1 : détermination du gain maximal ($0 < \nu < 1$)	131
4.3.4.2 – Exemple 2 : détermination de la marge de module ($1 < \nu < 2$)	133
4.4 – Commande H_∞ des systèmes non entiers commensurables	138
4.4.1 – Retour de pseudo état	138
4.4.2 – Retour de sortie dynamique	141
4.5 – Conclusion	145
5 Application : Isolation sismique d’un pont	147
5.1 – Introduction	149
5.2 – Modèle non entier du pont	150
5.3 – Commande H_∞ basée sur la décomposition d’un modèle non entier en un modèle entier et un modèle parabolique	152
5.4 – Commande H_∞ basée sur la pseudo représentation d’état	163
5.5 – Conclusion	167
Conclusion générale et perspectives	169

Annexes	172
A Inégalités Matricielles	173
A.1– Inégalités Matricielles	173
A.2– Problèmes à base d’inégalités matricielles	175
B Kalman-Yakubovič-Popov (KYP)	177
B.1– Lemme KYP généralisé	177
B.2– Modification du lemme KYP généralisé	178
Bibliographie	181

Table des figures

1.1	Facteur d'oubli : $\mathcal{O}_\nu(t - \tau)$ pour $0 < \nu \leq 1$	20
1.2	Représentation de la coupure du plan opérationnel	21
1.3	Variations des coefficients de pondération en fonction de ν pour $k = 8$. . .	23
1.4	Diagrammes de Bode de dérivateurs non entiers réels	27
1.5	Entrées, sorties et états d'un modèle dynamique	29
1.6	Schéma bloc associé à la pseudo représentation d'état (1.48)	31
1.7	Schéma bloc d'un intégrateur pur d'ordre non entier ν	31
1.8	Représentation d'un modèle non entier comme l'association d'un modèle entier classique et d'un modèle parabolique	40
1.9	Représentation du modèle de sortie $y_{ap}(t)$	40
1.10	Schéma bloc de simulation d'une pseudo représentation d'état non entière .	41
1.11	Diagrammes asymptotiques de Bode de $\mathbf{D}(s)$ et $D_N(s)$ pour $\nu \in]0, 1[$. .	43
1.12	Diagrammes de Bode de $(\frac{1}{s^\nu})$ et de son approximation $\mathcal{J}_\nu(s)$	43
2.1	Modèle standard pour l'analyse des systèmes de commande à contre-réaction	49
2.2	Région de stabilité (domaine vert) d'un modèle non entier commensurable	52
3.1	Description d'un modèle non entier comme un modèle entier incertain . . .	67
3.2	Synthèse du correcteur $K(s)$ sur le modèle entier incertain $H_i^{aug}(s)$	67
3.3	Décomposition d'un modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique	70
3.4	Ecriture de $H(s)$ comme un modèle entier affecté d'une incertitude additive	70
3.5	Représentation de $H_{ap}(s)$ comme un modèle entier $\tilde{H}_{ap}^2(s)$ affecté par une incertitude multiplicative $\delta(s)$	79

3.6	Représentation de $H(s)$ comme un modèle entier incertain en réécrivant $H_{ap}(s)$ comme un modèle incertain	79
3.7	Représentation de $H(s)$ comme un modèle entier $H_m^0(s)$ affecté par une incertitude multiplicative	80
3.8	Représentation de la fonction $\mu(e^{-z})$	81
3.9	Majorants de $ \mu(e^{-z}) $, (a) lorsque $z \in]-\infty, z_N]$, (b) lorsque $z \in [z_M, +\infty[$	82
3.10	Majorants de $ H_{ap}^1 $ et $ H_{ap}^3 $	82
3.11	Erreur $\overline{E_{ap}}(\omega)$ et approximation de $H_{ap}(s)$	83
3.12	Erreur relative $E^r(s)$ et gain du filtre $W_m(s)$	84
3.13	Comparaison des gains du modèle non entier $H(s)$, du modèle nominal $H_0(s)$ et du modèle entier incertain $H_m^i(s)$	84
3.14	Formulation d'un modèle non entier $H(s)$ comme un modèle entier incertain $H^i(s)$	85
3.15	Problème standard de synthèse H_∞	87
3.16	Problème de synthèse H_∞ faisant intervenir le bloc incertain fictif $\Delta_p(s)$	87
3.17	Asservissement du modèle entier incertain $H^i(s)$	88
3.18	Comparaison du filtre $W_1^{-1}(s)$ aux fonctions de sensibilité de l'entrée du modèle nominal notée $S_0(s)$, du modèle non entier notée $S_{ne}(s)$ et du modèle entier incertain $S_i(s)$	91
3.19	Comparaison du filtre $W_2^{-1}(s)$ aux fonctions de sensibilité de la commande du modèle nominal notée $KS_0(s)$, du modèle non entier notée $KS_{ne}(s)$ et du modèle entier incertain $KS_i(s)$	91
3.20	Réponses temporelles à un échelon unitaire du modèle non entier initial $H(s)$ (gauche) et du modèle bouclé $H_{bf}(s)$ (droite) par le correcteur par retour de sortie $K(s)$ calculé à partir du modèle entier incertain	92
4.1	Schéma bloc de $\phi(s)$	106
4.2	Valeurs propres des matrices A (a), H_γ (b) et H'_γ (c) pour $\nu = 1.3$ et $\ T_{zw}\ _{H_\infty} < \gamma$	114
4.3	Valeurs propres des matrices A (a), H_γ (b) et H'_γ (c) pour $\nu = 1.3$ et $\ T_{zw}\ _{H_\infty} > \gamma$	114
4.4	Valeurs propres des matrices A (a), H_γ (b) et H'_γ (c) pour $\nu = 0.6$ et $\ T_{zw}\ _{H_\infty} < \gamma$	115

TABLE DES FIGURES

4.5	Valeurs propres des matrices A (a), H_γ (b) et H'_γ (c) pour $\nu = 0.6$ et $\ T_{zw}\ _{H_\infty} > \gamma$	116
4.6	Valeurs propres des matrices A (+) et rA (*) pour $1 < \nu < 2$	117
4.7	Valeurs propres des matrices A (+) et rA (*) pour $0 < \nu < 1$	118
4.8	$\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^+$ (gauche) et $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^-$ (droite) vu comme l'union de trois demi-plans pour $1 < \nu < 2$	120
4.9	Barreaux thermiques (Résistances thermiques de 0 – 12W, orifices des sondes de mesure de température)	132
4.10	Modèle général à un degré de liberté d'une suspension automobile	133
4.11	Schéma bloc du modèle général à 1 degré de liberté d'une suspension automobile	134
4.12	Intersection de la courbe de Nyquist de $G(s)C(s)$ (trait plein) et du cercle de centre -1 et de rayon ζ (pointillés).	135
4.13	Boucle fermée avec une perturbation additive Δ	136
4.14	Valeurs propres (\times) de H_γ pour $\gamma = 1.45$ (gauche) et $\gamma = 1.4478$ (droite).	137
5.1	Maquette du pont	149
5.2	Représentation de $G(s)$ comme un modèle entier $H_m^0(s)$ affecté par des incertitudes multiplicatives	155
5.3	Comparaison des réponses fréquentielles de $H_1(s)$ et $H_2(s)$ à celles des modèles nominaux ($H_{10}(s)$ et $H_{20}(s)$) et incertains associés ($H_1^i(s)$ et $H_2^i(s)$)	155
5.4	Modèle entier incertain du pont $H_m^i(s)$ augmenté des filtres de pondération et boucle de commande associée	156
5.5	Problème de synthèse H_∞ associé à $H_{aug}^0(s)$	158
5.6	Comparaison du filtre $W_1^{-1}(s)$ aux fonctions de sensibilité de l'entrée du modèle nominal notée $S_0(s)$, du modèle non entier notée $S_{ne}(s)$ et du modèle entier incertain $S_i(s)$	159
5.7	Comparaison du filtre $W_2^{-1}(s)$ aux fonctions de sensibilité de la commande du modèle nominal notée $KS_0(s)$, du modèle non entier notée $KS_{ne}(s)$ et du modèle entier incertain $KS_i(s)$	159
5.8	Profil d'accélération du séisme de Northridge (17 janvier 1994) en $m.s^{-2}$	160
5.9	Analyse spectrale du profil d'accélération du séisme de Northridge	160

5.10	Déplacement du plateau (en m), en boucle ouverte (réponse de $H(s)$), et en boucle fermée avec le correcteur $K_{rsd}(s)$ (réponse de $H_{bf}(s)$)	161
5.11	Force F_{d1} (en N) générée par l'amortisseur en boucle fermée avec le correcteur $K_{rsd}(s)$	161
5.12	Schéma bloc du système en boucle fermée	163
5.13	Problème standard de synthèse d'un retour d'état H_∞	165
5.14	Valeur propres (\times) de la matrice $A+BK_{re}$ et limites du domaine de stabilité (demi-droites)	166
5.15	Gains des fonctions de sensibilité $T_{F_{d1}\ddot{u}_g}(s)$ et $T_{u_d\ddot{u}_g}(s)$ et pondérations $W_1'^{-1}(s)$ et $W_2^{-1}(s)$	166
5.16	Déplacement du plateau (en m), en boucle ouverte (réponse de $H(s)$), et en boucle fermée avec le correcteur K_{re} (réponse de $\Sigma_{bf}(s)$)	167
5.17	Force F_{d1} (en N), générée par l'amortisseur en boucle fermée avec le correcteur K_{re}	167

Liste des tableaux

4.1	Comparaison des conditions LMI pour la norme H_∞	130
4.2	Bornes supérieures sur le gain maximal en $^{\circ}\text{C.V}^{-1}$, déterminées à l'aide des différentes conditions LMI	133
5.1	Valeurs numériques des paramètres de la maquette de pont	151

Introduction générale

Contexte

L'opérateur de dérivation non entière comme outil de modélisation

Dès 1696, *Leibniz* évoque le concept de la dérivation non entière dans une lettre ouverte à l'*Hospital*. Mais lorsque ce dernier lui demande quelle pourrait bien être la dérivée d'ordre un demi d'une fonction, *Leibniz* répond que cela mène à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences [Ross, 1977]. Après deux siècles de réflexions de plusieurs mathématiciens tels que *Cauchy*, *Euler*, *Lagrange*, *Fourier*, *Abel*, *Laplace*, *Hardy*, *Riemann* et *Liouville*, la dérivation et l'intégration d'ordre non entier sont analytiquement définies.

Aujourd'hui, l'intérêt pour la dérivation non entière ne cesse de grandir. Cet intérêt est notamment expliqué par l'application réussie de ce concept dans les sciences physiques et les sciences de l'ingénieur. En automatique, la dérivation non entière est principalement utilisée dans deux types d'applications :

- comme outil de synthèse de lois de commande ;
- comme outil de modélisation.

Dans le premier cas, les caractéristiques fréquentielles du dérivateur non entier sont mises à profit pour synthétiser, avec un nombre de paramètres réduit, des lois de commande robustes vis-à-vis des variations paramétriques du modèle du système à commander (ce système étant généralement modélisé par des équations différentielles à dérivées entières). C'est notamment le cas des différentes générations de la commande CRONE [Oustaloup, 1991, Oustaloup et Mathieu, 1999] dont la dernière fait intervenir des dérivées d'ordre complexe.

Dans le second cas, c'est la propriété de *mémoire longue* de l'opérateur qui permet

de modéliser finement, et à l'aide d'un nombre de paramètres réduit, une large gamme de phénomènes physiques dans des domaines applicatifs variés tels que :

- l'électro-chimie où la diffusion des charges dans les batteries est régie notamment par des modèles de *Randles* [Rodrigues *et al.*, 2000, Sabatier *et al.*, 2006] ;
- la thermique où la solution exacte de l'équation de la chaleur dans un milieu semi-infini lie le flux thermique à la température de surface par une dérivée d'ordre 0.5 [Battaglia *et al.*, 2001, Cois, 2002] ;
- la biologie avec le comportement du muscle de grenouille [Sommacal *et al.*, 2005, 2006] et de salamandre [Sommacal *et al.*, 2007] ;
- la mécanique avec les propriétés dynamiques des matériaux visco-élastiques et notamment les problèmes de propagation d'ondes dans ces matériaux [Mainardi, 2010] mais également la relaxation de l'eau sur une digue poreuse où le débit est proportionnel à la dérivée non entière de la pression dynamique à l'interface eau-digue [Oustaloup, 1991] ;
- l'acoustique où dans un instrument à vent, la dérivée non entière est utilisée pour modéliser les pertes visco-thermiques [Matignon *et al.*, 1993] ;
- la robotique par la modélisation d'environnement [Orsoni, 2002] ;
- les réseaux de distribution électrique [Enacheanu, 2008].

Objectif de la thèse

Etendre la méthodologie de commande H_∞ aux modèles non entiers

Si les modèles non entiers s'avèrent utiles pour analyser le comportement d'une grande variété de systèmes, il paraît naturel de vouloir les mettre également à profit pour déterminer des lois de commande permettant d'améliorer ces systèmes. Parmi les différentes méthodes de synthèse de lois de commande, nous nous intéressons dans ce mémoire à la commande H_∞ qui permet de :

- répondre à un cahier des charges traduit sous la forme de contraintes imposées par des gabarits fréquentiels à différents transferts du système bouclé ;
- prendre en compte les approximations réalisées lors de l'établissement du modèle sous la forme d'incertitudes paramétriques ou dynamiques.

Pour traiter le problème de commande H_∞ impliquant un système dynamique décrit par un modèle non entier, une approche simple consiste à l'approximer par un modèle

entier pour pouvoir utiliser les méthodes de synthèse de lois de commande existant dans la littérature. Une telle approche présente un intérêt puisqu'elle ne nécessite pas le développement de nouvelles méthodes de synthèse. Cependant, si l'erreur d'approximation n'est pas prise en compte, cette méthode ne permet pas de garantir l'optimalité du correcteur vis-à-vis du modèle non entier de départ, ni même de garantir un niveau de performances souhaité.

En suivant cette idée, et afin d'obtenir un niveau de performances garanti, la première approche proposée dans ce mémoire passe par la réécriture du modèle non entier comme un modèle entier affecté d'une incertitude dynamique. Le modèle non entier initial est alors vu comme une réalisation possible du modèle entier incertain pour une valeur particulière de l'incertitude dynamique. Les méthodes de commande robuste H_∞ développées dans le cas entier peuvent alors être utilisées.

Selon le comportement dynamique du système étudié, le modèle entier nominal peut présenter un comportement dynamique sensiblement différent du modèle non entier initial. L'incertitude de modèle est alors importante et peut ainsi conduire à une dégradation notable des performances atteignables. Se pose alors la question du développement de méthodes de commande H_∞ spécifiques aux modèles non entiers. C'est le cas des approches développées dans la dernière partie du mémoire basées sur le formalisme LMI (Inégalités Matricielles Linéaires).

Organisation du mémoire

Les travaux présentés dans ce mémoire sont organisés selon cinq chapitres.

Le **chapitre 1** rappelle les notions mathématiques autour des opérateurs de dérivation et d'intégration non entière. Les différentes définitions et propriétés de ces opérateurs sont d'abord abordées, ce qui permet notamment d'effectuer leur caractérisation fréquentielle. L'utilisation de cet opérateur comme outil de modélisation des systèmes dynamiques est ensuite présentée. Différentes représentations associées à ces modèles non entiers sont ensuite détaillées dont la pseudo représentation d'état ainsi qu'une description du modèle non entier faisant intervenir des équations de diffusion (équations différentielles paraboliques) associées à un modèle linéaire (exponentiel) d'ordre entier classique. Une méthode de simulation des modèles non entiers est présentée en fin de chapitre.

Le **chapitre 2** formalise la problématique de cette thèse, à savoir l'élaboration de lois de commande selon des objectifs de performances spécifiés en utilisant l'outil qu'est la norme H_∞ . Pour ce faire, ce chapitre est divisé en quatre parties. Les deux premières présentent respectivement les principaux résultats disponibles autour de la stabilité des modèles non entiers et l'utilisation de la norme H_∞ pour évaluer leurs performances. La formalisation des problèmes de commande H_∞ est effectuée dans la troisième partie tandis que la dernière évoque les différentes approches envisagées pour résoudre ces problèmes, approches détaillées dans la suite de ce mémoire.

Le **chapitre 3** présente la commande H_∞ basée sur un modèle non entier écrit comme un modèle entier incertain obtenu par décomposition de la réponse impulsionnelle du modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique. Il s'agit de l'une des contributions principales de ce mémoire. Dans une première partie, les étapes de cette décomposition et de l'écriture du modèle entier incertain sont détaillées. Dans la seconde partie, les méthodes d'analyse de stabilité et de performances disponibles pour les modèles entiers sont utilisées pour étudier les caractéristiques du modèle non entier. De même, sa commande est ensuite effectuée sur la base du modèle entier incertain. Un exemple académique illustrant la méthodologie proposée clôture ce chapitre.

Le **chapitre 4** présente la commande H_∞ basée sur des modèles non entiers décrits par leur pseudo représentation d'état. La similarité d'écriture de cette pseudo représentation d'état avec la représentation d'état des modèles entiers permet d'envisager l'extension aux modèles non entiers des méthodes de synthèse H_∞ développées dans le cas entier, notamment celles basées sur des LMI. Pour ce faire, des conditions LMI d'analyse en stabilité des modèles non entiers sont d'abord présentées. Ensuite la norme H_∞ des modèles non entiers est évaluée à l'aide de conditions LMI développées spécifiquement pour ces modèles. Enfin, des conditions LMI permettant d'effectuer la commande H_∞ des modèles non entiers par retour d'état et par retour de sortie sont présentées.

Le **chapitre 5** permet d'appliquer les différentes contributions de ce mémoire à la commande H_∞ d'un système complexe : un pont monté sur des cales visco-élastiques, modélisé par un modèle non entier et soumis à des excitations sismiques. Après une description du système, un modèle non entier est établi. La commande H_∞ par retour de sortie dynamique de ce modèle non entier est d'abord effectuée en utilisant la décomposition en partie exponentielle et partie apériodique, développée dans le chapitre 3, pour l'écrire comme un modèle entier incertain. Enfin, les conditions LMI de synthèse de correcteurs

H_∞ par retour d'état développées dans le chapitre 4 sont appliquées au modèle. L'efficacité de l'ensemble des correcteurs obtenus est validée en simulation.

Notations

\mathbb{N}	ensemble des nombres entiers positifs
\mathbb{N}_n	ensemble des nombres entiers positifs de $[0, n]$
\mathbb{Z}	ensemble des nombres relatifs
\mathbb{Z}^-	ensemble des nombres relatifs négatifs
\mathbb{Q}	ensemble des nombres rationnels
\mathbb{R}	ensemble des nombres réels
\mathbb{R}^{*-}	ensemble des nombres réels négatifs privé de 0
\mathbb{R}^{*+}	ensemble des nombres réels positifs privé de 0
\mathbb{C}	ensemble des nombres complexes
\mathbb{C}^+	demi-plan droit ouvert des nombres complexes $s \in \mathbb{C}$ tels que $\Re(s) > 0$
$\lceil \nu \rceil$	le plus petit entier majorant ν (<i>ceil</i> (ν))
$\lfloor \nu \rfloor$	le plus grand entier minorant ν (<i>floor</i> (ν))
$\delta(t)$	impulsion de <i>Dirac</i>
$*$	produit de convolution
A^T	transposée d'un vecteur ou d'une matrice A
A^*	transconjugée d'un vecteur ou d'une matrice A
\mathbb{S}_n	Ensemble des matrices symétriques d'ordre n : $A = A^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$
\mathbb{H}_n	Ensemble des matrices hermitiennes d'ordre n : $A = A^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$
$u^{(k)}$	dérivée d'ordre k de u
$/$	tel que (symbole mathématique)
$A \setminus B$	A privé de B (symbole mathématique)
ν	ordre commensurable
ω	pulsation
BIBO	entrée bornée sortie bornée (Bounded Input Bounded Output)

CRONE	Commande Robuste d'Ordre Non Entier
deg	degré d'un polynôme
\mathbf{I}	opérateur d'intégration
\mathbf{I}^ν	opérateur d'intégration d'ordre $\nu \in \mathbb{R}^+$
$\mathcal{I}m(a)$	partie imaginaire de a
\mathcal{L}	transformée de <i>Laplace</i>
\mathcal{L}^{-1}	transformée inverse de <i>Laplace</i>
$\text{Sym}\{X\}$	$X + X^*$
$\ G(s)\ _{L_\infty}$	norme L_∞ de la matrice de transfert $G(s)$
$\ G(s)\ _{H_\infty}$	norme H_∞ de la matrice de transfert $G(s)$
LTI	linéaire et invariant dans le temps (Linear Time-Invariant)
MIMO	multi-variable (Multiple Input Multiple Output)
\mathbf{D}	opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$
\mathbf{D}^ν	dérivée d'ordre $\nu \in \mathbb{R}^+$
$\mathcal{R}e(a)$	partie réelle de a
<i>resp</i>	respectivement
s	variable de Laplace
s^ν	dérivateur d'ordre ν dans le domaine de <i>Laplace</i>
$\text{sgn}(\nu)$	fonction signe définie par $\text{sgn}(\nu) = \frac{\nu}{ \nu }$ et $\text{sgn}(0) = 1$
SISO	mono-entrée mono-sortie (Single Input Single Output)
sup	borne supérieure
\otimes	produit de Kronecker
$\bar{\sigma}(A)$	valeur singulière maximum de la matrice A

Chapitre 1

Dérivation non entière et modèles non entiers

Contents

1.1 – Introduction	17
1.2 – Définitions	18
1.2.1 – Intégration non entière	18
1.2.2 – Dérivation non entière	21
1.2.3 – Caractérisation fréquentielle d'un dérivateur et d'un intégrateur d'ordre non entier réel	26
1.3 – Modèles non entiers	28
1.3.1 – Modèles dynamiques, linéaires et invariants dans le temps (LTI)	28
1.3.2 – Equation différentielle d'ordres non entiers	30
1.3.3 – Pseudo représentation d'état	30
1.3.4 – Matrice de transfert d'un modèle non entier commensurable	33
1.3.5 – Décomposition d'un modèle non entier en un modèle entier et un modèle parabolique	34
1.3.6 – Simulation d'un modèle non entier en utilisant l'approximation par pôles et zeros récursifs	41
1.4 – Conclusion	44

1.1 – Introduction

Dès 1696, *Leibnitz* évoque le concept de dérivée d'ordre non entier dans une lettre ouverte à l'*Hospital*. Mais ce n'est qu'au XIX^{ème} siècle, avec les travaux de Liouville et Riemann [Liouville, 1832, Riemann, 1876], que la notion d'ordre de dérivation fut étendue au corps des réels et des complexes et qu'une interprétation physique lui fut trouvée.

Si la définition mathématique de ce concept s'avère incontestable, sa dénomination reste plutôt confuse, prenant en effet dans la littérature des appellations différentes, parfois inspirées du terme anglais “fractional calculus” [Oldham et Spanier, 1974]. Il est vrai que les appellations “dérivation non entière”, “dérivation fractionnaire” ou bien “dérivation généralisée” désignent toutes la même notion. Dans un souci de clarté et afin de ne pas alourdir la lecture de ce mémoire, les appellations génériques “dérivation non entière” et “intégration non entière” sont retenues pour désigner les opérateurs différentiels d'ordre réel, même si ce choix revêt un caractère restrictif sachant que la qualification “non entière” se veut couvrir des ordres de dérivation entiers, non entiers, réels ou complexes. Lorsqu'une distinction entre ordre strictement réel et ordre complexe méritera d'être soulignée, ces appellations seront respectivement complétées par les qualificatifs “réelle” ou “complexe”.

Comme annoncé dans l'introduction générale, cet outil peut également être utilisé pour modéliser finement, et à l'aide d'un nombre de paramètres réduit, une large gamme de phénomènes physiques. Ainsi, les systèmes considérés dans ce manuscrit sont modélisés à l'aide de la dérivation non entière et nous verrons, dans les prochains chapitres, qu'une partie des lois de commande développées pour ces systèmes hériteront de ce caractère non entier.

Dans ce mémoire, nous nous limitons à des dérivées non entières d'ordre réel. En effet, l'opérateur de dérivation non entière est principalement utilisé ici comme outil de modélisation et les applications physiques font très majoritairement intervenir des modèles non entiers à dérivées réelles.

L'objet de ce chapitre est tout d'abord de rappeler les définitions et les propriétés liées à la dérivation et à l'intégration non entière. Une caractérisation fréquentielle des opérateurs de dérivation et d'intégration non entière est ensuite proposée. Les systèmes non entiers, décrits par des équations différentielles faisant intervenir des dérivées non entières de la sortie et/ou de l'entrée sont ensuite présentés. Enfin, différentes représentations de ces systèmes et une méthode de simulation en découlant sont examinées.

1.2 – Définitions

1.2.1 – Intégration non entière

1.2.1.1 – Définition

Soit $f(t)$ une fonction temporelle de \mathbb{R} dans \mathbb{C} continue par morceaux sur $]t_0, +\infty[$ et intégrable sur $[t_0, t[$ pour tout $t > t_0$. La formule de *Cauchy* permet d'exprimer l'intégrale entière d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de $f(t)$ par :

$$\mathbf{I}_{t_0}^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

En s'inspirant de la formule de *Cauchy*, *Riemann* a défini en 1847 l'expression générale de l'intégrale d'ordre $\nu \in \mathbb{R}_+^*$ de $f(t)$ sous la forme de l'expression suivante :

$$\mathbf{I}_{t_0}^\nu f(t) \triangleq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.2)$$

où $\mathbf{I}_{t_0}^\nu$ est l'opérateur d'intégration non entière d'ordre ν et $\Gamma(\nu)$ est la fonction Gamma définie par :

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu-1} dx. \quad (1.3)$$

Remarque 1.2.1 Pour $\nu = n \in \mathbb{N}^*$, on montre que $\Gamma(n) = (n-1)!$ et la définition de l'intégration à un ordre entier (1.1) devient un cas particulier de l'intégration à un ordre non entier (1.2).

Peu d'ouvrages retracent l'historique de l'établissement de cette définition issue de correspondances scientifiques entre plusieurs mathématiciens célèbres comme *L'Hôpital*, *Leibnitz*, *Euler*, *Lacroix*, *Fourier*, *Abel*, *Liouville*, *Riemann*, *Sonin*, *Laurent*, *Grünwald* ou *Leitnikov*. Pour une description détaillée de ces correspondances, le lecteur pourra se référer aux ouvrages [Dugowson, 1994, Miller et Ross, 1993, Oldham et Spanier, 1974, Ross, 1977, Samko *et al.*, 1993].

1.2.1.2 – Propriétés

Dans ce paragraphe sont rappelées quelques propriétés de l'opérateur d'intégration non entière utilisées dans ce mémoire. Le lecteur intéressé pourra se référer à [Oldham et Spanier, 1974] pour une liste plus complète.

L'opérateur d'intégration non entière vérifie la propriété de semi-groupe, soit :

$$\mathbf{I}^{\nu_1} \circ \mathbf{I}^{\nu_2} = \mathbf{I}^{\nu_1 + \nu_2}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \nu_1 \geq 0 \\ \nu_2 \geq 0 \end{cases} . \quad (1.4)$$

La propriété de semi-groupe implique la propriété de commutativité, soit :

$$\mathbf{I}^{\nu_1} \circ \mathbf{I}^{\nu_2} = \mathbf{I}^{\nu_2} \circ \mathbf{I}^{\nu_1} \quad (1.5)$$

et l'effet de l'opérateur \mathbf{I}^ν sur les fonctions de puissance est [Samko *et al.*, 1993] :

$$\mathbf{I}_{t_0}^\nu t^\alpha = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1 - \nu)} t^{\alpha + \nu}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \nu > 0 \\ \alpha > -1 \\ t > t_0 \end{cases} . \quad (1.6)$$

1.2.1.3 – Sens géométrique et physique de l'intégration non entière

La difficulté d'attribuer un sens géométrique ou physique à l'opérateur d'intégration non entière n'est certainement pas étrangère au peu d'intérêt que les physiciens lui ont porté lorsqu'il a été initialement évoqué.

Néanmoins, la définition (1.2) peut être interprétée comme l'aire que définit la fonction $f(t)$ pondérée par un facteur d'oubli représenté par la fonction \mathcal{O}_ν sur l'intervalle $[t_0, t]$:

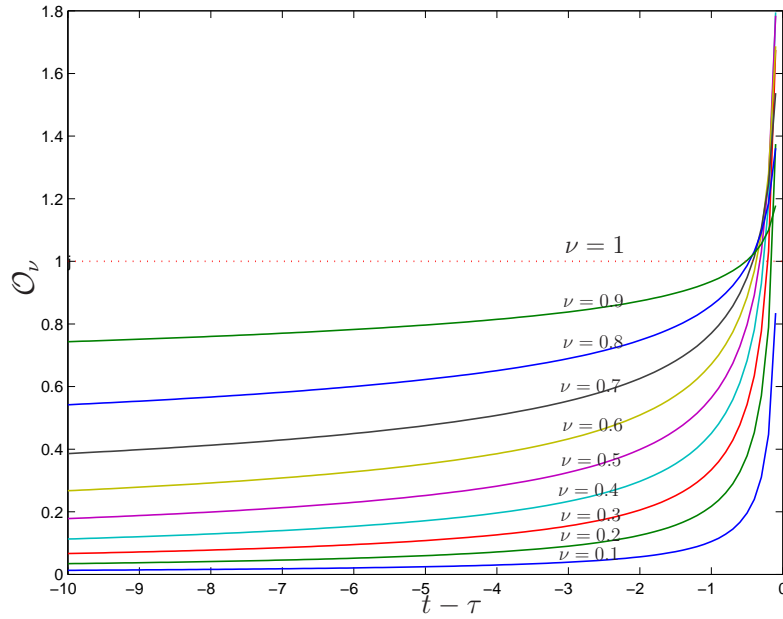
$$\mathbf{I}_{t_0}^t f(t) = \int_{t_0}^t \frac{(t - \tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} f(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathcal{O}_\nu(t - \tau) f(\tau) d\tau = (\mathcal{O}_\nu * f)(t) \quad (1.7)$$

où

$$\mathcal{O}_\nu(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} . \quad (1.8)$$

D'après la remarque 1.2.1, dans le cas où $\nu = 1$, la fonction \mathcal{O}_ν vaut 1 et $\mathbf{I}_{t_0}^\nu f(t)$ est une intégrale classique (entière d'ordre 1), toutes les valeurs de $f(t)$ ayant le même “poids” sur $[t_0, t]$. Si ν est un réel compris entre 0 et 1, les valeurs les plus récentes ont plus de “poids” que les valeurs les plus anciennes. La figure 1.1 représente les variations du facteur d'oubli pour des valeurs de ν comprises entre 0.1 et 1.

A travers cette interprétation géométrique, les différentes pondérations obtenues en faisant varier l'ordre d'intégration ν mettent en évidence l'aptitude de cet opérateur à décrire des phénomènes physiques à mémoire longue tels que les phénomènes de diffusion.


 FIGURE 1.1 – Facteur d'oubli : $\mathcal{O}_\nu(t - \tau)$ pour $0 < \nu \leq 1$

1.2.1.4 – Transformée de Laplace de l'intégrale non entière d'une fonction

L'écriture de l'intégration non entière comme un produit de convolution (1.7) permet de calculer la transformée de Laplace de l'intégrale non entière d'une fonction temporelle causale, soit [Oldham et Spanier, 1974] :

$$\mathcal{L} \{ \mathbf{I}_0^\nu f(t) \} = \mathcal{L} \left\{ \frac{t^{\nu-1} u(t)}{\Gamma(\nu)} * f(t) \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{t^{\nu-1} u(t)}{\Gamma(\nu)} \right\} \mathcal{L} \{ f(t) \} = \frac{1}{s^\nu} F(s), \quad (1.9)$$

où $F(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \}$, $s = \sigma + j\omega$ désignant la variable de Laplace.

Cette relation traduit un résultat remarquable car elle généralise la formule bien connue dans le cas entier :

$$\mathcal{L} \{ \mathbf{I}_{t_0}^n f(t) \} = \frac{1}{s^n} F(s), \quad (1.10)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ représente l'ordre d'intégration entier.

Remarque 1.2.2 Il est important de noter que s^ν est une fonction multiforme de \mathbb{C} . En effet, en exprimant $s = \rho e^{j\theta}$, le développement de s^ν conduit à :

$$s^\nu = (\rho e^{j\theta})^\nu = \rho^\nu e^{j\nu\theta}, \quad (1.11)$$

relation dans laquelle la multiformité apparaît à travers le terme $e^{j\nu\theta}$. Il est donc nécessaire de limiter à 2π la plage de variation de l'argument de la variable s par une coupure du

plan complexe comme indiqué sur la figure 1.2. Cette coupure, définie par la demi-droite d'origine $O(0,0)$ et d'angle orienté φ par rapport à l'axe des abscisses, doit être choisie de manière à respecter deux contraintes :

- s^ν doit garder son sens classique lorsque ν est entier ;
- afin de pouvoir calculer la transformée inverse de Laplace d'une fonction, la coupure ne doit pas croiser la droite verticale du demi-plan droit définie par les bornes de l'intégrale de Mellin-Fourier.

Ainsi en définissant l'argument de s comme l'angle orienté θ tel que $\theta \in]\varphi - 2\pi, \varphi[$, l'angle φ de la coupure doit respecter l'inégalité suivante :

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}. \quad (1.12)$$

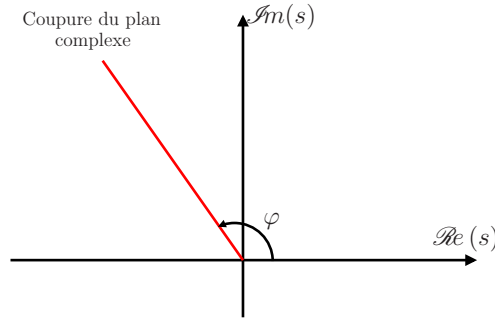


FIGURE 1.2 – Représentation de la coupure du plan opérationnel

1.2.2 – Dérivation non entière

Pour définir la dérivée non entière d'une fonction temporelle, les notations suivantes sont adoptées :

$$\nu = [\nu] + \{\nu\}, \quad (1.13)$$

où $\nu \in \mathbb{R}_+^*$, $[\nu]$ est sa partie entière et $\{\nu\}$ sa partie non entière telle que $0 \leq \{\nu\} < 1$.

1.2.2.1 – Définition au sens de *Riemann-Liouville*

La dérivée d'ordre non entier $\nu \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction $f(t)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} au sens de Riemann-Liouville est la dérivée d'ordre entier $([\nu] + 1)$ de l'intégrale d'ordre non entier $([\nu] - \nu + 1)$, soit [Riemann, 1876] :

$${}_r\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) \triangleq \frac{d^{[\nu]+1}}{dt^{[\nu]+1}} \left(\mathbf{I}_{t_0}^{[\nu]-\nu+1} f(t) \right). \quad (1.14)$$

En utilisant la définition de l'intégrale non entière (1.2), l'équation (1.14) devient :

$${}_r\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma([\nu] - \nu + 1)} \frac{d^{[\nu]+1}}{dt^{[\nu]+1}} \left(\int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\nu - [\nu]}} d\tau \right), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t > t_0 \\ \nu > 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

Remarque 1.2.3 Lorsque $\nu < 0$, l'intégrale d'ordre ν est définie par :

$$\mathbf{I}_{t_0}^\nu f(t) = {}_r\mathbf{D}_{t_0}^{-\nu} f(t), \quad (1.16)$$

de même que la dérivée d'ordre ν est définie par :

$${}_r\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) = \mathbf{I}_{t_0}^{-\nu} f(t) \quad (1.17)$$

1.2.2.2 – Définition au sens de *Caputo*

La dérivée non entière au sens de *Caputo* résulte de la permutation de la dérivée et de l'intégrale dans l'équation (1.14), soit [Caputo, 1967] :

$${}_c\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) \triangleq \mathbf{I}_{t_0}^{[\nu] - \nu + 1} \left(\frac{d^{[\nu]+1}}{dt^{[\nu]+1}} f(t) \right). \quad (1.18)$$

En tenant compte de la définition de l'intégrale non entière (1.2), l'équation (1.18) devient :

$${}_c\mathbf{D}_{t_0}^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma([\nu] - \nu + 1)} \int_{t_0}^t \frac{f^{([\nu]+1)}(\tau)}{(t - \tau)^{\nu - [\nu]}} d\tau. \quad (1.19)$$

Cette définition introduite par *Caputo* a connu un succès certain, notamment car elle permet de prendre en compte simplement les conditions initiales. Il a cependant été démontré que l'utilisation de cette définition pour la modélisation des systèmes dynamiques et la prise en compte des conditions initiales conduit à des résultats incohérents [Sabatier et al., 2010].

1.2.2.3 – Définition au sens de *Grünwald*

La définition de la dérivée non entière au sens de *Grünwald* est issue de la généralisation de la définition de *Cauchy* de la dérivée entière. En effet, la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$ d'une fonction réelle est définie par :

$$\mathbf{D}^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \quad (1.20)$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ désigne le coefficient binomial de Newton.

En étendant cette relation à l'ordre non entier, on obtient la définition de *Grünwald* [Grünwald, 1867], soit :

$${}_g\mathbf{D}^\nu f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\nu}{k} f(t - kh), \quad \nu \in \mathbb{R}^+, \quad (1.21)$$

où $\binom{\nu}{k} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{k!\Gamma(\nu-k+1)}$ désigne le coefficient binomial de Newton généralisé.

La dérivée non entière au sens de *Grünwald* tient compte des valeurs de la fonction $f(t - kh)$, avec $k = \{0 \dots \infty\}$, ce qui lui donne un caractère global. En effet, pour des ordres non entiers, les coefficients de pondération $(-1)^k \binom{\nu}{k}$ ne s'annulent pas comme le montrent leurs variations en fonction de ν sur la figure 1.3 dans le cas $k = 8$.

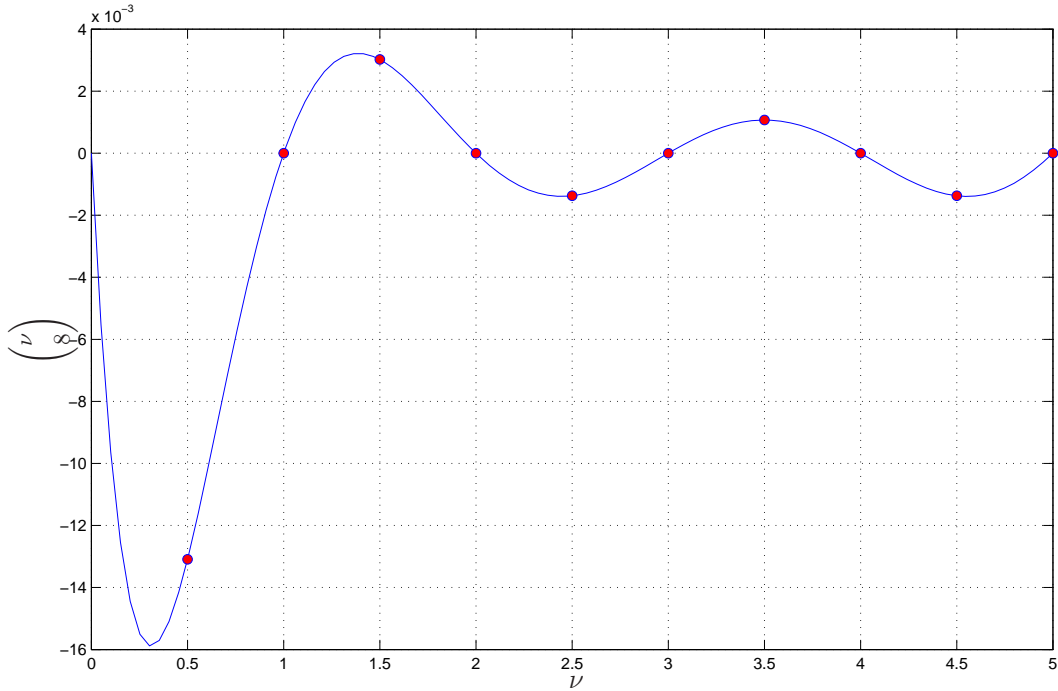


FIGURE 1.3 – Variations des coefficients de pondération en fonction de ν pour $k = 8$

Si la fonction $f(t)$ est nulle pour tout $t \leq t_0$, la somme apparaissant dans l'équation

(1.21) devient finie et s'écrit :

$${}_g\mathbf{D}^\nu f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\nu} \sum_{k=0}^K (-1)^k \binom{\nu}{k} f(t - kh), \quad (1.22)$$

où $K = \left\lfloor \frac{t - t_0}{h} \right\rfloor$.

Bien que l'équivalence des définitions de *Riemann-Liouville* (1.15) et de *Grünwald* (1.21) ne soit pas toujours vérifiée, il a été démontré dans [Oustaloup, 1995], que pour la plupart des fonctions, la définition de *Grünwald* converge vers celle de *Riemann-Liouville*.

1.2.2.4 – Condition d'existence

La définition des conditions d'existence de la dérivée non entière d'une fonction temporelle $f(t)$ passe par l'introduction d'une classe de fonctions particulières : les fonctions de classe C_ν .

Définition 1.2.4 (Classe C_ν) Une fonction $f(t)$ ($t > 0$) est dite de classe C_ν ($\nu \in \mathbb{R}$) si elle s'écrit sous la forme :

$$f(t) = t^\lambda g(t), \quad \lambda > \nu \quad (1.23)$$

où $g(t)$ est continue dans $[0, +\infty[$ et elle est de classe C_ν^m si en plus $f^{(m)} \in C_\nu$, $m \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.2.5 (Weilbeer, 2005) Les dérivées non entières au sens de *Riemann-Liouville*, au sens de *Caputo* et au sens de *Grünwald* existent si et seulement si f est $(p - 1)$ fois différentiable au sens classique avec $p = \lceil \nu \rceil$. De plus, si les conditions initiales sont nulles (i.e. $\forall t \leq 0, f^{(k)}(t) = 0, \forall k \in \{0, 1, \dots, p - 1\}$) alors les trois dérivées sont équivalentes.

Remarque 1.2.6 Compte tenu de l'équation 1.19, une condition d'existence supplémentaire est nécessaire pour la dérivée non entière au sens de *Caputo* : la fonction $f^{(\lfloor \nu \rfloor + 1)}(t)$ doit être intégrable sur tout l'intervalle $[0, t]$.

1.2.2.5 – Propriétés principales

Propriété 1.2.7 Indépendamment de la définition de la dérivée non entière utilisée, il est courant de parler indifféremment de l'intégration ou de la dérivation non entière, puisque seul le signe de l'ordre ν est déterminant :

$$\begin{cases} \mathbf{I}^\nu f(t) \triangleq \mathbf{D}^{-\nu} f(t) \\ \mathbf{I}^0 f(t) = \mathbf{D}^0 f(t) = f(t) \end{cases} \quad (1.24)$$

Propriété 1.2.8 *La dérivée non entière au sens de Riemann-Liouville vérifie :*

$${}_r\mathbf{D}^\nu \circ \mathbf{I}^\nu f(t) = f(t), \quad \nu > 0, \quad (1.25)$$

$${}_r\mathbf{D}^{\nu_1} \circ \mathbf{I}^{\nu_2} f(t) = \mathbf{I}^{\nu_2 - \nu_1} f(t), \quad \nu_2 > \nu_1 > 0. \quad (1.26)$$

Propriété 1.2.9 *Contrairement aux opérateurs d'intégration non entière, les opérateurs de dérivation non entière ne vérifient la propriété de semi-groupe que sous certaines conditions. On montre en effet que si $f(t)$ est de classe C_ν alors [Samko et al., 1993] :*

$${}_r\mathbf{D}^{\nu_1} \circ {}_r\mathbf{D}^{\nu_2} f(t) = \mathbf{D}^{\nu_1 + \nu_2} f(t), \quad \nu_2 < \nu_1 + 1, \quad \nu_1 > 0, \quad (1.27)$$

$${}_r\mathbf{D}^n \circ {}_r\mathbf{D}^\nu f(t) = \mathbf{D}^{n+\nu} f(t), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.28)$$

Propriété 1.2.10 *Pour $0 < \nu \leq 1$ et $f(t) \in C_\nu$,*

$$(\mathbf{I}_{t_0}^\nu \circ {}_c\mathbf{D}_{t_0}^\nu f)(t) = \int_{t_0}^t \frac{df}{dt} dt = f(t) - f(t_0). \quad (1.29)$$

Preuve

$$(\mathbf{I}_{t_0}^\nu \circ {}_c\mathbf{D}_{t_0}^\nu f)(t) = \mathbf{I}_{t_0}^\nu \circ \mathbf{I}_{t_0}^{1-\nu} \frac{df}{dt} = \mathbf{I}_{t_0}^{\nu+1-\nu} \frac{df}{dt} = \int_{t_0}^t \frac{df}{d\tau} d\tau = f(t) - f(t_0). \quad (1.30)$$

1.2.2.6 – Transformée de Laplace de la dérivée non entière d'une fonction temporelle

Du fait de la non unicité de la définition de la dérivée non entière, l'expression de sa transformée de Laplace n'est pas unique et fait apparaître des différences dans la manière de prendre en compte les conditions initiales.

La transformée de Laplace de la dérivée n-ième entière est donnée par :

$$\mathcal{L}\{\mathbf{D}^n f(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \mathbf{D}^{n-k-1} f(t) \Big|_{t=0^+}. \quad (1.31)$$

Cette formule peut être généralisée au cas d'une dérivée non entière d'ordre ν au sens de *Riemann-Liouville* comme démontré dans [Oldham et Spanier, 1974] :

$$\mathcal{L}({}_r\mathbf{D}^\nu f(t)) = s^\nu F(s) - \sum_{k=0}^{[\nu]} s^k {}_r\mathbf{D}^{\nu-k-1} f(t) \Big|_{t=0^+}. \quad (1.32)$$

De la même manière, il est possible de démontrer que la transformée de Laplace de la dérivée non entière d'ordre ν au sens de *Caputo* s'écrit :

$$\mathcal{L}({}_c\mathbf{D}^\nu f(t)) = s^\nu F(s) - \sum_{k=0}^{[\nu]} s^{\nu-k-1} {}_r\mathbf{D}^k f(t) \Big|_{t=0^+}. \quad (1.33)$$

Il convient de mentionner que les conditions initiales de la transformée de Laplace au sens de *Riemann* s'expriment en fonction des valeurs à l'origine des dérivées non entières alors que celles de la transformée de Laplace de la dérivée au sens de *Caputo* s'expriment en fonction des valeurs à l'origine des dérivées entières.

Les valeurs initiales des dérivées entières et non entières des systèmes relaxés à $t = t_0$ sont nulles. En conséquence, les expressions des transformées de Laplace des dérivées au sens de *Riemann* et de *Caputo* sont identiques et se réduisent à :

$$\mathcal{L}(\mathbf{D}^\nu f(t)) = s^\nu \mathcal{L}(f(t)). \quad (1.34)$$

1.2.3 – Caractérisation fréquentielle d'un dérivateur et d'un intégrateur d'ordre non entier réel

Un dérivateur non entier réel est tel que sa grandeur de sortie $y(t)$ s'identifie à un facteur près, à la dérivée non entière de sa grandeur d'entrée $u(t)$, soit :

$$y(t) = \tau^\nu \mathbf{D}^\nu u(t), \quad (1.35)$$

où τ désigne la *constante de temps de différentiation* et $\nu \in \mathbb{R}$ l'ordre de dérivation réel (ν pouvant être positif ou négatif, l'opérateur considéré étant alors soit un dérivateur, soit un intégrateur).

A l'aide de la relation (1.34) et en supposant que *tout le passé de l'opérateur est nul*, la transformée de Laplace de la sortie $y(t)$ s'écrit :

$$Y(s) = (\tau s)^\nu U(s), \quad (1.36)$$

soit, en posant $\omega_u = 1/\tau$, appelée fréquence au gain unité ou fréquence de transition :

$$Y(s) = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\nu U(s), \quad (1.37)$$

d'où l'on tire la transmittance :

$$\mathbf{D}(s) = \left(\frac{s}{\omega_u}\right)^\nu, \quad (1.38)$$

dont la réponse en fréquence est déduite en remplaçant s par $j\omega$, soit :

$$\mathbf{D}(j\omega) = \left(\frac{j\omega}{\omega_u}\right)^\nu. \quad (1.39)$$

Définis comme le module et l'argument de $\mathbf{D}(j\omega)$, le gain et la phase du dérivateur admettent des expressions de la forme :

$$\begin{cases} |\mathbf{D}(j\omega)| = \left(\frac{\omega}{\omega_u}\right)^\nu \\ \arg(\mathbf{D}(j\omega)) = \nu \frac{\pi}{2} \end{cases} . \quad (1.40)$$

Le système d'équation (1.40) révèle une propriété remarquable de ce type de dérivateur :

- le diagramme de gain est caractérisé par une droite oblique de pente 20ν dB par décade ;
- le diagramme de phase est caractérisé par une droite horizontale d'ordonnée $\varphi = \nu \frac{\pi}{2}$ rad.

La figure 1.4 représente les diagrammes de Bode de dérivateurs non entiers réels pour des ordres de dérivation compris entre -1.5 et 1.5.

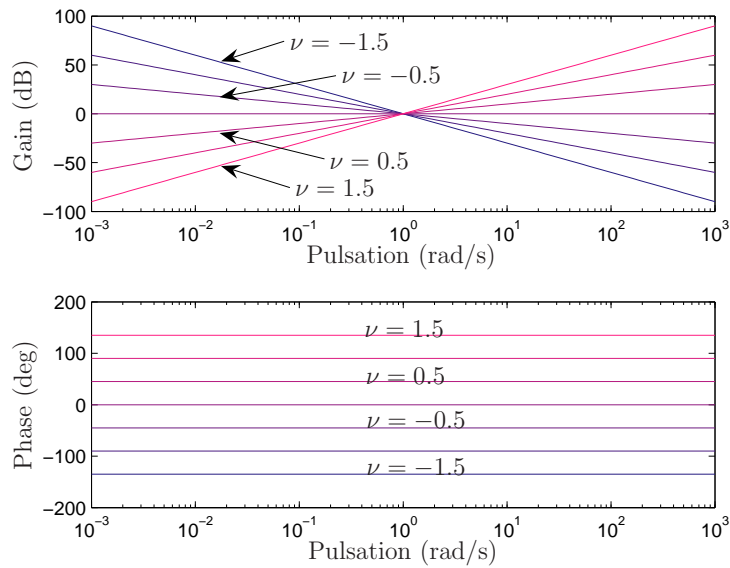


FIGURE 1.4 – Diagrammes de Bode de dérivateurs non entiers réels

Le caractère non entier réel de l'ordre de dérivation ν , permet ainsi d'assurer, tant au niveau du diagramme de gain que du diagramme de phase, une variation continue :

- de la pente de la droite de gain ;
- de l'ordonnée de la droite de phase.

1.3 – Modèles non entiers

L'opérateur de dérivation non entière est principalement utilisé dans ce manuscrit comme outil de modélisation. En effet, comme détaillé dans l'introduction de ce chapitre, le comportement de nombreux systèmes physiques, notamment ceux faisant intervenir des phénomènes de diffusion, peut être fidèlement retranscrit par des modèles utilisant cet opérateur.

Ainsi ce paragraphe s'attachera à présenter différents types de modèles faisant intervenir la dérivation non entière ainsi qu'à faire apparaître leurs intérêts et limitations. La méthode numérique choisie dans ce manuscrit pour simuler ces modèles sera présentée en fin de paragraphe.

1.3.1 – Modèles dynamiques, linéaires et invariants dans le temps (LTI)

Dans cette première partie sont rappelées quelques définitions et propriétés communes aux différents types de modèles présentés par la suite. Ces définitions et propriétés sont énoncées de manière générale, sans faire appel à un modèle mathématique particulier. Les différents modèles étudiés s'attacheront à retranscrire notamment le comportement entrée-sortie du système. Dans le cas général, le modèle pourra être multivariable, c'est-à-dire posséder plusieurs variables d'entrée, regroupées dans un vecteur $e(t) \in \mathbb{R}^{n_e}$, et plusieurs variables de sortie, regroupées dans un vecteur $s(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$. Les modèles étudiés sont dynamiques et possèdent ainsi la propriété de causalité : leur comportement à un instant t , caractérisé par le vecteur $s(t)$, dépend des entrées $e(t)$ présentes et passées. Ce principe de causalité peut être associé à la notion d'état.

L'état, noté $\eta(t)$, constitué d'un nombre fini ou infini de variables, contient les informations nécessaires pour décrire l'effet de la totalité des entrées $e(t)$ passées sur le futur comportement du modèle caractérisé par les sorties $s(t)$.

Définition 1.3.1 (Etat d'un modèle) *Un vecteur d'état $\eta(t)$ contient le nombre minimal de variables telles que, si pour $t = t_0$ $\eta(t_0)$ est connu, alors $s(t_1)$ et $\eta(t_1)$ peuvent être déterminés de manière unique pour tout $t_1 \geq t_0$ si $e(t)$ est connu sur l'intervalle $[t_0, t_1]$.*

L'ensemble des variables $e(t)$, $s(t)$ et $\eta(t)$ décrivant le comportement dynamique du modèle sont représentées sur la figure 1.5.

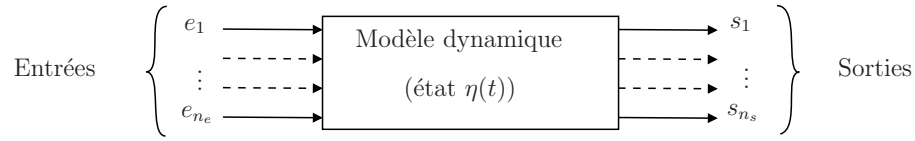


FIGURE 1.5 – Entrées, sorties et états d'un modèle dynamique

Dans cette thèse, le comportement des systèmes étudiés sera approché par des modèles possédant les propriétés de linéarité et d'invariance dans le temps.

Définition 1.3.2 (Modèle linéaire) Soit $s_i(t)$ la sortie d'un modèle en réponse à une entrée $e_i(t)$. Le modèle est dit linéaire si, pour une combinaison linéaire d'entrées :

$$e(t) = \sum_i \alpha_i e_i(t), \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \quad (1.41)$$

la réponse $s(t)$ est une combinaison linéaire des réponses élémentaires à chacune des entrées appliquées individuellement :

$$s(t) = \sum_i \alpha_i s_i(t). \quad (1.42)$$

En pratique, la majorité des modèles décrivant des systèmes physiques sont non linéaires. Cependant, leur fonctionnement dans un domaine donné peut être considéré en première approximation comme linéaire.

Définition 1.3.3 (Modèle invariant dans le temps) Soit $s(t)$ la sortie d'un modèle en réponse à une entrée $e(t)$. Ce modèle est dit invariant dans le temps si, pour tout $T \geq 0$, la même entrée décalée d'un temps T :

$$e_d(t) = e(t + T) \quad (1.43)$$

produit la même sortie décalée de T :

$$s_d(t) = s(t + T). \quad (1.44)$$

Différents types de modèles dynamiques, linéaires et invariants dans le temps (LTI) sont présentés dans les paragraphes suivants.

1.3.2 – Equation différentielle d'ordres non entiers

Un premier type de modèle faisant intervenir la dérivation non entière prend la forme d'un ensemble d'équations différentielles d'ordres non entiers de la forme :

$$\sum_{i=0}^p Q_i \mathbf{D}^{\nu_{y_i}} y(t) = \sum_{j=0}^m R_j \mathbf{D}^{\nu_{u_j}} u(t), \quad (1.45)$$

avec $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $R_j \in \mathbb{R}^{p \times m}$. $y(t) \in \mathbb{R}^p$ et $u(t) \in \mathbb{R}^m$ désignent respectivement la sortie et l'entrée du modèle. Les ordres de dérivation sont des réels positifs tels que :

$$0 < \nu_{y_0} < \dots < \nu_{y_p} \quad \text{et} \quad 0 < \nu_{u_0} < \dots < \nu_{u_m}. \quad (1.46)$$

De plus, le fait que le modèle soit propre implique que $\nu_{u_m} < \nu_{y_p}$.

Dans ce manuscrit, seuls les modèles non entiers commensurables, constituant une sous classe de modèles non entiers, sont étudiés.

Définition 1.3.4 (Modèle LTI commensurable) *Le modèle LTI non entier décrit par le système d'équations différentielles (1.45) est dit commensurable si et seulement si tous les ordres de dérivation apparaissant sont multiples d'un même ordre $\nu = \text{pgcd}(\nu_{y_1}, \dots, \nu_{y_p}, \nu_{u_1}, \dots, \nu_{u_m})$ appelé ordre commensurable du modèle.*

Dans ce cas et puisque les opérations de dérivation non entière utilisées pour modéliser un système physique relaxé à l'instant $t = t_0$ vérifient la propriété de semi-groupe, l'équation différentielle (1.45) peut être réécrite sous la forme [Cois, 2002] :

$$\sum_{i=0}^{\tilde{p}} \tilde{Q}_i (\mathbf{D}^\nu)^i y(t) = \sum_{j=0}^{\tilde{m}} \tilde{R}_j (\mathbf{D}^\nu)^j u(t), \quad (1.47)$$

avec $\tilde{p}\nu = \nu_{y_p}$ et $\tilde{m}\nu = \nu_{u_m}$.

1.3.3 – Pseudo représentation d'état

A condition initiales nulles, le modèle non entier commensurable défini par l'équation différentielle (1.47), admet une pseudo représentation d'état de la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\nu x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad (1.48)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le *pseudo vecteur d'état*, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sont des matrices constantes, ν étant l'ordre commensurable qui, s'il est présenté comme

dans la définition 1.3.4, permet d'avoir une pseudo représentation d'état de dimension minimale [Aoun, 2005]. En effet, la pseudo représentation d'état (1.48) n'est pas unique. Des formes similaires aux formes canoniques observables ou commandables d'un modèle entier peuvent être obtenues.

Le schéma bloc associé à la représentation (1.48) est donné sur la figure 1.6. Ainsi,

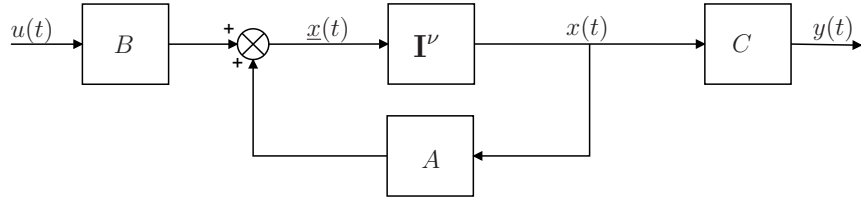


FIGURE 1.6 – Schéma bloc associé à la pseudo représentation d'état (1.48)

contrairement à ce que pourrait laisser penser l'écriture (1.48), la pseudo représentation d'état ne fait pas appel explicitement à l'opérateur de dérivation non entière mais uniquement à celui d'intégration non entière. Ainsi, il n'est pas nécessaire de préciser à quelle définition particulière fait appel l'opérateur de dérivation \mathbf{D}^ν dans l'équation (1.48). Par ailleurs, même si le système est supposé à conditions initiales nulles à $t = t_0$, c'est-à-dire que le système est supposé au repos ($u(t) = y(t) = x(t) = 0, \forall t > t_0$), il est important de préciser que $x(t)$ ne joue pas le rôle d'état du modèle non entier. Pour mieux comprendre ce phénomène, considérons dans un premier temps le cas simple d'un intégrateur pur supposé au repos à $t = t_0$. Cet intégrateur admet une pseudo représentation d'état de la forme (1.48) où $A = 0, B = 1, C = 1$ et $D = 0$. Le schéma bloc associé est représenté sur la figure 1.7.

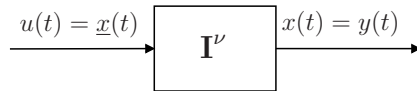


FIGURE 1.7 – Schéma bloc d'un intégrateur pur d'ordre non entier ν

Dans le cas d'un intégrateur d'ordre entier, $\nu = 1$ et (1.48) est une représentation d'état du modèle. Plaçons-nous à un instant $t_1 > t_0$. La valeur de x peut être calculée si les entrées appliquées entre t_0 et t_1 sont connues :

$$x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \underline{x}(\tau) d\tau. \quad (1.49)$$

Les valeurs de $x(t)$ aux instants postérieurs à t_1 sont donnés par :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{t_0}^t \underline{x}(\tau) d\tau \\ &= \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \underline{x}(\tau) d\tau}_{x(t_1)} + \int_{t_1}^t \underline{x}(\tau) d\tau, \quad t > t_1. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Ainsi, $x(t)$ peut être calculé en connaissant $x(t_1)$ ainsi que les entrées \underline{x} appliquées entre t_1 et t . La sortie de l'intégrateur à un instant t donné permet ainsi de résumer tout le passé du système. $x(t)$ est bien l'état du modèle dynamique, en accord avec la définition 1.3.1.

Appliquons le même raisonnement au cas d'un intégrateur non entier d'ordre ν . D'après l'équation (1.2) définissant l'intégration non entière, la valeur de x à un instant $t_1 > t_0$ peut être calculée si les entrées appliquées entre t_0 et t_1 sont connues :

$$x(t_1) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - \tau)^{\nu-1} \underline{x}(\tau) d\tau = x_1 = cste. \quad (1.51)$$

La valeur de x à tout instant $t > t_1$ s'écrit :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\nu-1} \underline{x}(\tau) d\tau \\ &= \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{t_0}^{t_1} (t - \tau)^{\nu-1} \underline{x}(\tau) d\tau}_{\alpha(t) \neq cste \neq x_1} + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{t_1}^t (t - \tau)^{\nu-1} \underline{x}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Deux différences notables peuvent être soulignées par rapport au cas entier. La première est que le terme $\alpha(t)$ dans l'équation (1.52) n'est pas une constante mais dépend de l'instant t considéré. De plus, la connaissance de $x_1 = x(t_1)$ ne permet pas de calculer $\alpha(t)$. La sortie x de l'intégrateur n'est donc pas un état pour le modèle non entier.

Le même raisonnement peut être tenu pour le cas général d'une pseudo représentation d'état de la forme (1.48) où A , B , C et D sont quelconques. Les sorties $x(t)$ des intégrateurs du schéma bloc de la figure 1.6 ne peuvent ainsi être considérées comme les variables d'état du modèle.

Remarque 1.3.5 *Pour calculer le terme $\alpha(t)$ pour un t quelconque, il est ainsi nécessaire de connaître $\underline{x}(t)$, $\forall t \in [t_0; t_1]$. Les modèles non entiers sont ainsi qualifiés de modèles de dimension infinie car une infinité de valeurs sont nécessaires pour résumer leur passé.*

Puisque x ne représente pas l'état réel du modèle non entier (qui est de dimension infinie), il est appelé pseudo état. La représentation (1.48) est à utiliser avec certaines précautions, notamment lorsque des conditions initiales interviennent. Le lecteur intéressé pourra consulter les références [Sabatier *et al.*, 2013, 2010, Trigeassou et Maamri, 2009, 2010, 2011] pour des discussions plus détaillées sur l'utilisation de la pseudo représentation d'état et les problèmes liés aux conditions initiales. Cette représentation est néanmoins utilisée dans ce mémoire, pour des conditions initiales nulles car sa structure, similaire à celle de la représentation d'état entière, permet d'étendre au cas non entier un certain nombre de résultats développés pour des modèles entiers.

1.3.4 – Matrice de transfert d'un modèle non entier commensurable

Pour des conditions initiales nulles, la transformée de Laplace de la pseudo représentation d'état (1.48) s'écrit :

$$\begin{cases} s^\nu X(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (1.53)$$

En déduisant l'expression de $X(s)$ de l'équation dynamique de la pseudo représentation d'état (1.53) et en l'injectant dans l'expression de $Y(s)$, on obtient :

$$\begin{cases} X(s) &= (s^\nu I - A)^{-1} BU(s) \\ Y(s) &= (C(s^\nu I - A)^{-1} B + D) U(s) \end{cases} \quad (1.54)$$

La matrice de transfert s'écrit donc :

$$G(s) = C(s^\nu I - A)^{-1} B + D, \quad (1.55)$$

où $G(s) \in \mathbb{C}^{p \times m}$. La matrice de réponse impulsionnelle associée à $G(s)$ est déduite à l'aide de la transformée inverse de Laplace : $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ où, à chaque instant t , $g(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$.

La matrice de transfert $G(s)$ fait apparaître des termes de la forme :

$$g_{ij}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{C_0 \prod_k (s^{\nu_k} - z_k)}{\prod_l (s^{\nu_l} - p_l)} = \frac{\sum_p \alpha_p s^{\nu_p}}{\sum_q \beta_q s^{\nu_q}}, \quad \nu_p, \nu_q \in \mathbb{R}, \quad (1.56)$$

où $\alpha_p, \beta_q \in \mathbb{R}$, $z_k \in \mathbb{C}$ et $p_l \in \mathbb{C}$ sont respectivement les zéros et les pôles du transfert considéré qui peuvent être réels ou complexes conjugués. Par ailleurs, le modèle étant

commensurable, (1.56) s'écrit aussi :

$$g_{ij}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_p \alpha_p (s^\nu)^p}{\sum_q \beta_q (s^\nu)^q} = \frac{C_0 \prod_k ((s^\nu)^k - \mathfrak{z}_k)}{\prod_l ((s^\nu)^l - \mathfrak{p}_l)}. \quad (1.57)$$

Un changement de variable de la forme $\mathfrak{s} = s^\nu$ fait apparaître $N(s)$ et $D(s)$ dans l'équation (1.57) comme des polynômes. Les racines de ces polynômes, notées \mathfrak{z}_k et \mathfrak{p}_l , sont respectivement appelées s^ν zéros et s^ν pôles du transfert. Sous hypothèse de non compensation des pôles et des zéros lors de l'écriture du transfert, les s^ν pôles sont également les valeurs propres de la matrice A (ce résultat est immédiatement déduit de l'équation (1.55) en posant $\mathfrak{s} = s^\nu$).

Contrairement aux modèles entiers, les pôles p_l , définis comme les racines du dénominateur des différents transferts, ne correspondent pas aux valeurs propres de la matrice dynamique A de la pseudo représentation d'état (dans le cas général $p_l \neq \mathfrak{p}_l$ et $z_k \neq \mathfrak{z}_k$).

1.3.5 – Décomposition d'un modèle non entier en un modèle entier et un modèle parabolique

Cette partie présente une représentation des modèles non entiers mettant en jeu un modèle linéaire entier classique et un modèle décrit par une équation parabolique. Cette représentation est basée sur la décomposition de la réponse impulsionnelle d'un modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique. Cette décomposition de la réponse impulsionnelle apparaît dans la littérature pour la première fois dans [Oustaloup, 1983]. Elle se rapproche de la représentation diffusive introduite dans [Montseny, 1998], mais ne correspond pas au sens strict à une représentation diffusive dans la mesure où la partie exponentielle n'est pas décrite par une représentation diffusive. Cette représentation permet de faire apparaître le vrai état du système non entier, état de dimension infinie. Les développements présentés dans le cas multivariable dans cette partie sont issus de [Sabatier *et al.*, 2012].

1.3.5.1 – Décomposition modale d'un modèle non entier

Comme pour les modèles entiers, la décomposition modale du système différentiel (1.48) est donnée par :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\nu x_J(t) &= Jx_J(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C_J x_J(t) + Du(t) \end{cases}, \quad (1.58)$$

où J est une matrice de Jordan dont la diagonale est composée des valeurs propres de la matrice A notées λ_l , $l \in \{1, \dots, r\}$ de multiplicité n_l .

Si le système était au repos à l'instant t_0 et en utilisant la transformée inverse de Laplace, la sortie $y(t)$ est donnée par :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(C_J (s^\nu I - J)^{-1} B_J \right) * u(t) + Du(t) \quad (1.59)$$

avec

$$(s^\nu I - J)^{-1} = \text{diag} \left((s^\nu I - J_{n_1}(\lambda_1))^{-1}, \dots, (s^\nu I - J_{n_l}(\lambda_l))^{-1}, \dots, (s^\nu I - J_{n_r}(\lambda_r))^{-1} \right), \quad (1.60)$$

où l'on suppose que la variable de Laplace s appartient à un sous-espace de \mathbb{C} dans lequel $(s^\nu I - J)^{-1}$ existe et chaque bloc de Jordan est donné par :

$$(s^\nu I - J_{n_l}(\lambda_l))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^\nu - \lambda_l} & \left(\frac{1}{s^\nu - \lambda_l} \right)^2 & \cdots & \left(\frac{1}{s^\nu - \lambda_l} \right)^{nl} \\ & \frac{1}{s^\nu - \lambda_l} & & \vdots \\ & & \ddots & \left(\frac{1}{s^\nu - \lambda_l} \right)^2 \\ & & & \frac{1}{s^\nu - \lambda_l} \end{bmatrix}, \quad \sum_{l=1}^r n_l = n. \quad (1.61)$$

La sortie $y(t)$ est donc une combinaison linéaire de n termes appelés modes et définis par :

$$h^{\lambda_l, q}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \left(\frac{1}{s^\nu - \lambda_l} \right)^q \right\}, \quad q \in \{1, \dots, n_l\}, \quad l \in \{1, \dots, r\}. \quad (1.62)$$

1.3.5.2 – Calcul des modes

Les modes $h^{\lambda_l, q}(t)$ définis par la relation (1.62) peuvent tous être décomposés en deux parties [Oustaloup, 1983] :

$$h^{\lambda_l, q}(t) = h_{exp}^{\lambda_l, q}(t) + h_{ap}^{\lambda_l, q}(t), \quad (1.63)$$

où $h_{exp}^{\lambda_l, q}(t)$, similaire à la réponse impulsionnelle d'un modèle entier, est la partie exponentielle du mode tandis que $h_{ap}^{\lambda_l, q}(t)$ est sa partie apériodique.

1.3.5.2.1 – Partie exponentielle

La partie exponentielle $h_{exp}^{\lambda_l, q}(t)$ est déduite du calcul des résidus des pôles du mode $h^{\lambda_l, q}(t)$. Contrairement aux modèles entiers, ces pôles ne correspondent pas aux valeurs propres de la pseudo matrice d'état A car ils sont solutions de l'équation :

$$s^\nu - \lambda_l = 0. \quad (1.64)$$

Une valeur propre λ_l de la matrice A ne génère de pôles que si l'ensemble \mathbb{K}_{λ_l} défini par

$$\mathbb{K}_{\lambda_l} = \left\{ k \in \mathbb{Z} : -\frac{\nu}{2} - \frac{\arg(\lambda_l)}{2\pi} < k < \frac{\nu}{2} - \frac{\arg(\lambda_l)}{2\pi} \right\}, \quad (1.65)$$

n'est pas vide. Dans ce cas, $n_{\mathbb{K}_{\lambda_l}} = \text{card}(K_{\lambda_l})$ pôles $p_j^{\lambda_l}, j \in \{1, \dots, n_{\mathbb{K}_{\lambda_l}}\}$ peuvent être associés à λ_l . Ces pôles sont définis par :

$$p_j^{\lambda_l} = |p_j^{\lambda_l}| e^{j\theta_j^{\lambda_l}}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} |p_j^{\lambda_l}| = |\lambda_l|^{\frac{1}{\nu}} \\ \theta_j^{\lambda_l} = \frac{1}{\nu} \arg(\lambda_l) + \frac{2k\pi}{\nu} \\ k \in \mathbb{K}_{\lambda_l} \end{cases} \quad (1.66)$$

$h_{exp}^{\lambda_l, q}(t)$ est donc définie par :

$$h_{exp}^{\lambda_l, q}(t) = \sum_{j=1}^{n_{\mathbb{K}_{\lambda_l}}} \frac{p_j^{\lambda_l}}{\lambda_l^q} Q_{q-1} \left(\frac{1}{\nu}, t p_j^{\lambda_l} \right) e^{t p_j^{\lambda_l}}, \quad (1.67)$$

où $Q_k(\alpha, \beta)$ est un polynôme défini par [Oustaloup, 1983] :

$$\begin{cases} Q_0(\alpha, \beta) = \alpha \\ Q_k(\alpha, \beta) = (\alpha\beta + \alpha - \beta) Q_{k-1}(\alpha, \beta) + \alpha\beta \frac{\partial}{\partial \beta} Q_{k-1}(\alpha, \beta) \end{cases} \quad (1.68)$$

1.3.5.2.2 – Partie aperiodique

Comme démontré dans [Matignon, 1998, Oustaloup, 1983], $h_{ap}^{\lambda_l}(t)$ est définie par :

$$h_{ap}^{\lambda_l}(t) = \int_0^{+\infty} \mu^{\lambda_l, q}(\chi) e^{-t\chi} d\chi, \quad (1.69)$$

avec

$$\mu^{\lambda_l, q}(\chi) = \frac{1}{\pi} \frac{\sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \binom{q}{j} (\lambda_l)^j \chi^{\nu(q-j)} \sin(\nu\pi(q-j))}{(\chi^{2\nu} - 2\lambda_l \chi^\nu \cos(\nu\pi) + \lambda_l^2)^q}, \quad \binom{q}{j} = \frac{q!}{j!(q-j)!}. \quad (1.70)$$

1.3.5.3 – Représentation d'un modèle non entier par l'association d'un modèle parabolique et d'un modèle LTI entier

Comme pour les modes, la réponse $y(t)$ du système (1.48) avec $D = 0$, peut être représentée comme la somme :

$$y(t) = y_{exp}(t) + y_{ap}(t), \quad y_{exp}(t) \in \mathbb{R}^p, \quad y_{ap}(t) \in \mathbb{R}^p \quad (1.71)$$

avec

$$y_{exp}(t) = \int_0^t C_J \begin{bmatrix} h_{exp}^{\lambda_1}(\tau) & & \\ & \ddots & \\ & & h_{exp}^{\lambda_r}(\tau) \end{bmatrix} B_J u(t - \tau) d\tau \quad (1.72)$$

$$y_{ap}(t) = \int_0^t C_J \begin{bmatrix} h_{ap}^{\lambda_1}(\tau) & & \\ & \ddots & \\ & & h_{ap}^{\lambda_r}(\tau) \end{bmatrix} B_J u(t - \tau) d\tau, \quad (1.73)$$

et

$$h_{exp}^{\lambda_l}(\tau) = \begin{bmatrix} h_{exp}^{\lambda_l,1}(\tau) & h_{exp}^{\lambda_l,2}(\tau) & \cdots & h_{exp}^{\lambda_l,n_l}(\tau) \\ & h_{exp}^{\lambda_l,1}(\tau) & & \vdots \\ & & \ddots & h_{exp}^{\lambda_l,2}(\tau) \\ & & & h_{exp}^{\lambda_l,1}(\tau) \end{bmatrix} \quad h_{ap}^{\lambda_l}(\tau) = \begin{bmatrix} h_{ap}^{\lambda_l,1}(\tau) & h_{ap}^{\lambda_l,2}(\tau) & \cdots & h_{ap}^{\lambda_l,n_l}(\tau) \\ & h_{ap}^{\lambda_l,1}(\tau) & & \vdots \\ & & \ddots & h_{ap}^{\lambda_l,2}(\tau) \\ & & & h_{ap}^{\lambda_l,1}(\tau) \end{bmatrix} \quad (1.74)$$

En utilisant la relation (1.69) donnant l'expression de la partie apériodique d'un mode, la relation (1.73) devient :

$$y_{ap}(t) = C_J \int_0^{+\infty} \begin{bmatrix} \mu^{\lambda_1}(\chi) & & \\ & \ddots & \\ & & \mu^{\lambda_r}(\chi) \end{bmatrix} w(\chi, t) d\chi = C_J \int_0^{+\infty} \mu(\chi) w(\chi, t) d\chi \quad (1.75)$$

avec

$$\mu^{\lambda_l}(\chi) = \begin{bmatrix} \mu^{\lambda_l,1}(\chi) & \mu^{\lambda_l,2}(\chi) & \cdots & \mu^{\lambda_l,n_l}(\chi) \\ & \mu^{\lambda_l,1}(\chi) & & \vdots \\ & & \ddots & \mu^{\lambda_l,2}(\chi) \\ & & & \mu^{\lambda_l,1}(\chi) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad w(\chi, t) = \int_0^t e^{-\tau\chi} B_J u(t - \tau) d\tau \quad (1.76)$$

d'où

$$\dot{w}(\chi, t) = -\chi w(\chi, t) + B_J u(t), \quad w(\chi, t) \in \mathbb{R}^m, \quad \chi \in \mathbb{R}^+ . \quad (1.77)$$

Les relations (1.75) et (1.77) permettent de définir le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{w}(\chi, t) &= -\chi w(\chi, t) + B_J u(t) \\ y_{ap}(t) &= C_J \int_0^{+\infty} \mu(\chi) w(\chi, t) d\chi \end{cases}, \quad (1.78)$$

où les conditions initiales sont définies par $w(\chi, 0) = \rho(\chi)$.

Le système (1.78) peut être réécrit :

$$\begin{cases} \dot{w}(\chi, t) &= -\chi w(\chi, t) + B_J u(t) \\ y_{ap}(t) &= \frac{1}{2} C_J \int_0^{+\infty} \mu(\chi) w(\chi, t) d\chi + \frac{1}{2} C_J \int_0^{+\infty} \mu(\chi) w(\chi, t) d\chi \end{cases} \quad (1.79)$$

En faisant les changements de variables $z = \frac{\sqrt{\chi}}{2\pi}$ pour la première intégrale de la relation (1.79) et $z = -\frac{\sqrt{\chi}}{2\pi}$ pour la seconde intégrale, $\Psi(z, t) = w(4\pi^2 z^2, t)$ représentant la transformée de Fourier de la fonction $\Phi(\zeta, t)$ avec $\Psi(z, 0) = \rho(4\pi^2 z^2)$, $z \in \mathbb{R}$, il est démontré dans [Montseny, 1998, Sabatier *et al.*, 2010] que pour un modèle commensurable, la relation (1.79) devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi(z, t)}{\partial t} &= (2i\pi z)^2 \Psi(z, t) + B_J \mathcal{F}\{u(t)\} \\ y_{ap}(t) &= C_J \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 z \mu(4\pi^2 z^2) e^{-2i\pi z \zeta} d\zeta \right) \Phi(\zeta, t) d\zeta \end{cases} \quad (1.80)$$

En appliquant le changement de variable $\tilde{z} = -z$ au système (1.80) et en prenant sa transformée de Fourier inverse, celle-ci devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(\zeta, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \Phi(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} + B_J u(t) \delta(\zeta) \\ y_{ap}(t) &= C_J \int_{-\infty}^{+\infty} m(\zeta) \Phi(\zeta, t) d\zeta \end{cases}, \quad (1.81)$$

avec

$$m(\zeta) = \mathcal{F}\{-4\pi^2 \tilde{z} \mu(4\pi^2 \tilde{z}^2)\} \quad \text{et} \quad \Phi(\zeta, 0) = \mathcal{F}^{-1}\{\rho(4\pi^2 \tilde{z}^2)\}, \quad \zeta \in \mathbb{R}. \quad (1.82)$$

Etant donnée la relation (1.72), tout modèle non entier peut s'écrire :

$$y(t) = y_{exp}(t) + y_{ap}(t) \quad (1.83)$$

avec

$$\begin{cases} \dot{\eta}(t) &= P\eta(t) + B_P u(t) \\ y_{exp}(t) &= C_P \eta(t) \end{cases} \quad (1.84)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(\zeta, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \Phi(\zeta, t)}{\partial \zeta^2} + B_J u(t) \delta(\zeta) \\ y_{ap}(t) &= C_J \int_{-\infty}^{+\infty} m(\zeta) \Phi(\zeta, t) d\zeta \end{cases} \quad (1.85)$$

La représentation d'état du modèle de réponse impulsionnelle $h_{exp}^{\lambda_l}(t)$ générée par la valeur propre λ_l est :

$$\begin{cases} \dot{\eta}_l(t) &= P_l \eta_l(t) + B_l u(t) \\ y_l(t) &= C_l \eta_l(t) \end{cases} \quad (1.86)$$

La transformée de Laplace de la relation (1.67) avec $q = 1$ permet de déduire les matrices du système (1.86) :

$$P_l = \begin{bmatrix} p_1^{\lambda_l} & & \\ & \cdots & \\ & & p_{n_{\mathbb{K}\lambda_l}}^{\lambda_l} \end{bmatrix}, \quad B_l = \begin{bmatrix} \frac{p_1^{\lambda_l}}{\nu\lambda_l} b_{l1} & \cdots & \frac{p_1^{\lambda_l}}{\nu\lambda_l} b_{lm} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{p_{n_{\mathbb{K}\lambda_l}}^{\lambda_l}}{\nu\lambda_l} b_{l1} & \cdots & \frac{p_{n_{\mathbb{K}\lambda_l}}^{\lambda_l}}{\nu\lambda_l} b_{lm} \end{bmatrix}, \quad C_l = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1l} & \cdots & c_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{pl} & \cdots & c_{pl} \end{bmatrix}}_{\substack{n_{\mathbb{K}\lambda_l} \text{ colonnes}}} \quad (1.87)$$

Les matrices C_P , P et B_P sont déduites de la mise en commun de toutes les représentations d'état (1.86) :

$$C_P = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{11} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{p1} \end{bmatrix}}_{\substack{n_{\mathbb{K}\lambda_1} \text{ colonnes}}} \cdots \underbrace{\begin{bmatrix} c_{1n} & c_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ c_{pn} & c_{pn} \end{bmatrix}}_{\substack{n_{\mathbb{K}\lambda_n} \text{ colonnes}}} \quad (1.88)$$

$$P = \begin{bmatrix} p_1^{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & p_{n_{\mathbb{K}\lambda_1}}^{\lambda_1} & \\ \hline & & & \ddots \\ \hline & & & & p_1^{\lambda_n} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & p_{n_{\mathbb{K}\lambda_n}}^{\lambda_n} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_P = \begin{bmatrix} \frac{p_1^{\lambda_1}}{\nu\lambda_1} b_{11} & \cdots & \frac{p_1^{\lambda_1}}{\nu\lambda_1} b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{p_{n_{\mathbb{K}\lambda_1}}^{\lambda_1}}{\nu\lambda_1} b_{11} & \cdots & \frac{p_{n_{\mathbb{K}\lambda_1}}^{\lambda_1}}{\nu\lambda_1} b_{1m} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ \hline \frac{p_1^{\lambda_n}}{\nu\lambda_n} b_{n1} & \cdots & \frac{p_1^{\lambda_n}}{\nu\lambda_n} b_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{p_{n_{\mathbb{K}\lambda_n}}^{\lambda_n}}{\nu\lambda_1} b_{n1} & \cdots & \frac{p_{n_{\mathbb{K}\lambda_n}}^{\lambda_n}}{\nu\lambda_1} b_{nm} \end{bmatrix}. \quad (1.89)$$

Un modèle non entier est donc un modèle de dimension infinie décrit par un ensemble d'équations de diffusion (équations différentielles paraboliques [Weinberger, 1965]) associées à un modèle linéaire (exponentiel) d'ordre entier classique, comme représenté sur la figure 1.8.

La figure 1.9 illustre l'interprétation du sous-modèle parabolique de sortie $y_{ap}(t)$. $\Phi(\zeta, t)$ est le vrai vecteur d'état du sous-système qui est de dimension infinie par rapport à ζ . $u(t)$ est le signal d'entrée du modèle linéaire entier et du modèle de dimension infinie. Notons que pour ce dernier, il est appliqué à $\zeta = 0$. L'interprétation de la figure 1.9 met également en évidence qu'un modèle non entier est doublement infini : infini du fait du caractère distribué de l'état, mais également sur un espace de dimension infinie.

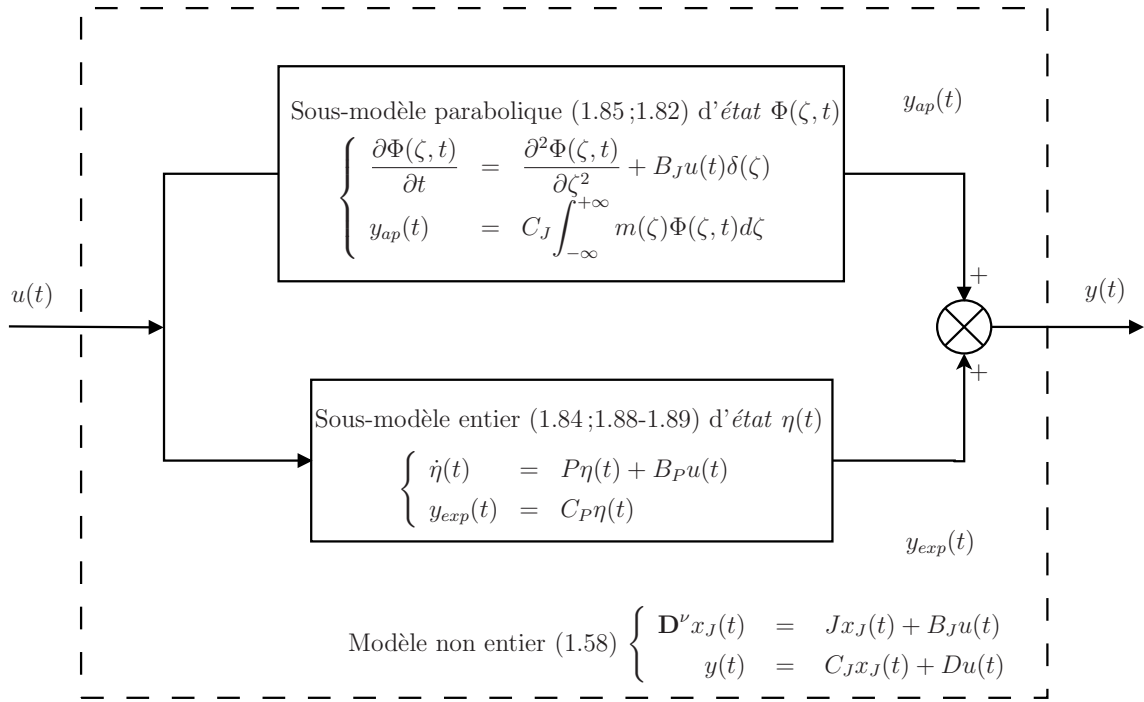


FIGURE 1.8 – Représentation d'un modèle non entier comme l'association d'un modèle entier classique et d'un modèle parabolique

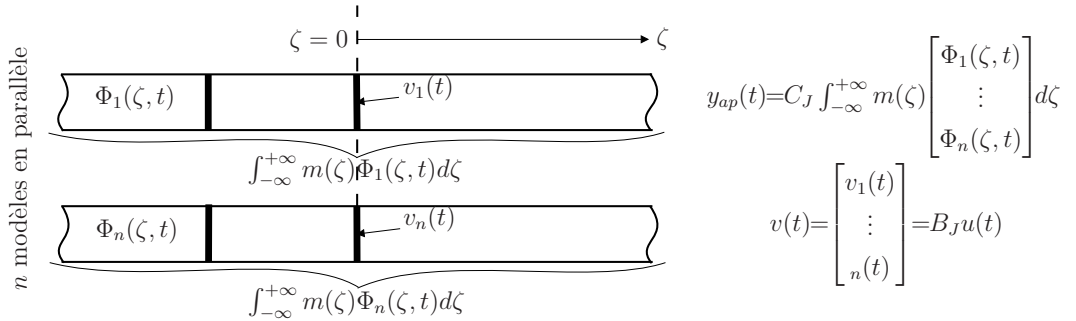


FIGURE 1.9 – Représentation du modèle de sortie $y_{ap}(t)$

Remarque 1.3.6 *Seule cette représentation permet d'étudier de manière rigoureuse un certain nombre de propriétés du modèle telles que la stabilité interne, la commandabilité, l'observabilité et l'initialisation car elle fait apparaître le véritable état du modèle. La pseudo représentation d'état sera néanmoins majoritairement utilisée dans ce manuscrit, sous hypothèse de conditions initiales nulles, car sa structure proche de celle d'une représentation d'état entière est adaptée à l'extension d'un certain nombre de méthodes de synthèse de lois de commande.*

1.3.6 – Simulation d'un modèle non entier en utilisant l'approximation par pôles et zeros récurrents

Plusieurs méthodes de simulation d'un modèle non entier existent. La méthode utilisée dans ce manuscrit, basée sur la pseudo représentation d'état (1.48), repose sur l'approximation de l'opérateur d'intégration non entière apparaissant dans le schéma bloc de simulation de la figure 1.7 par un modèle rationnel borné en fréquences noté $\mathcal{J}_\nu(s)$, tel qu'indiqué sur la figure 1.10. La synthèse de ce modèle approximé, basée sur une approche fréquentielle, est présentée dans les paragraphes qui suivent. Elle se déroule en deux temps. L'intégrateur non entier est d'abord limité à une bande de fréquences. Son comportement fréquentiel est ensuite approximé sur cette bande de fréquences par une fonction de transfert faisant apparaître une distribution récursive de pôles et de zéros.

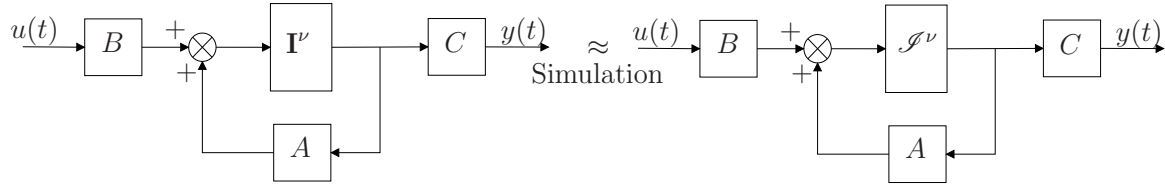


FIGURE 1.10 – Schéma bloc de simulation d'une pseudo représentation d'état non entière

Soit $\left(\frac{1}{s^\nu}\right)_{[\omega_A, \omega_B]}$ un opérateur d'intégration non entier d'ordre ν limité à la bande fréquentielle $[\omega_A, \omega_B]$:

$$\left(\frac{1}{s^\nu}\right) = \begin{cases} \frac{1}{s^\nu}, & \forall \omega \in [\omega_A, \omega_B] \\ \frac{1}{s}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.90)$$

L'approximation de l'opérateur borné en fréquence $\left(\frac{1}{s^\nu}\right)_{[\omega_A, \omega_B]}$ proposée est inspirée de celle proposée pour un dérivateur non entier dans [Oustaloup, 1983, 1995] :

$$\left(\frac{1}{s^\nu}\right)_{[\omega_A, \omega_B]} \approx \mathcal{J}_\nu(s) = C(\nu) \left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}}\right)^{1-\nu} \cdot \frac{1}{s}, \quad 0 < \nu < 1, \quad (1.91)$$

où $\omega_b < \omega_h$, $C(\nu)$ étant fixé de manière à obtenir un gain unitaire à la pulsation 1 rad.s⁻¹ :

$$C(\nu) = \left| \frac{1 + j\frac{1}{\omega_h}}{1 + j\frac{1}{\omega_b}} \right|^{\nu-1} = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{1-\nu} \left(\frac{1 + \omega_b^2}{1 + \omega_h^2}\right)^{\frac{1-\nu}{2}}. \quad (1.92)$$

Remarque 1.3.7 Le choix d'imposer un comportement intégrateur en dehors de la bande de fréquence $[\omega_A, \omega_B]$, plutôt qu'un gain constant par exemple, permet d'éviter des problèmes

d'erreur statique lors des simulations et d'obtenir un meilleur conditionnement numérique (comportement passe-bas en haute fréquence).

La synthèse de l'intégrateur non entier apparaissant dans (1.91) repose sur une distribution récursive de zéros et de pôles réels :

$$\left(\frac{1 + \frac{s}{\omega_h}}{1 + \frac{s}{\omega_b}} \right)^{1-\nu} = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(s) \quad (1.93)$$

avec

$$D_N(s) = \left(\frac{\omega_u}{\omega_h} \right)^{1-\nu} \prod_{k=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega'_k}}{1 + \frac{s}{\omega_k}}, \quad (1.94)$$

dans laquelle

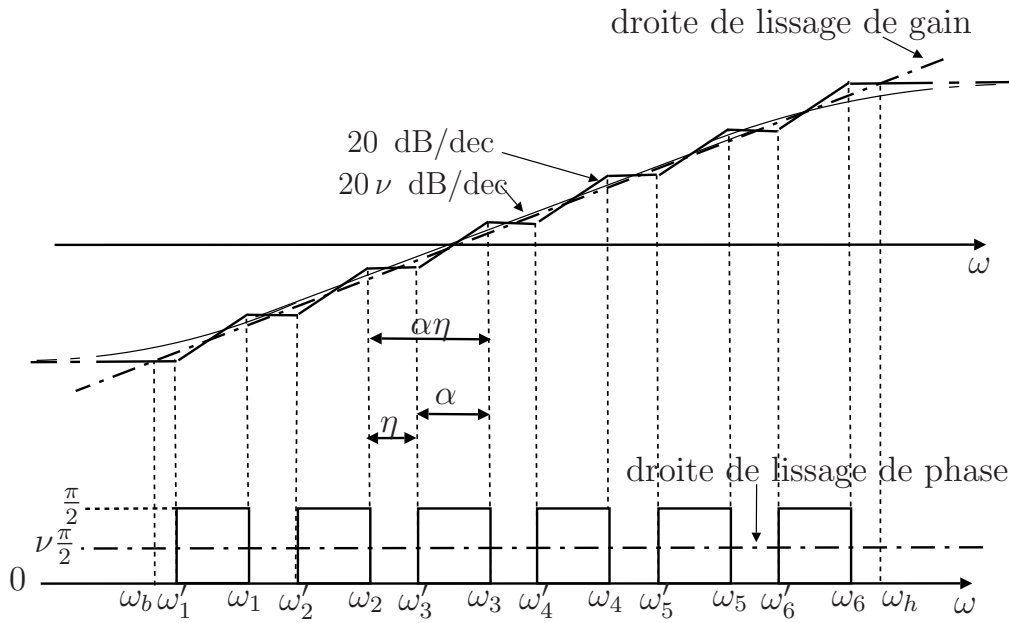
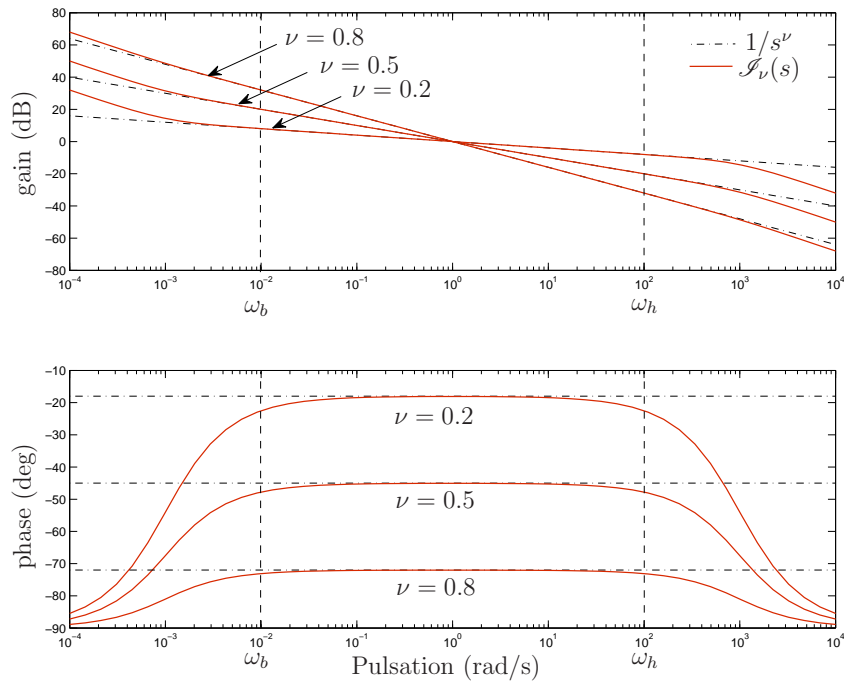
$$\omega_u = (\omega_h \omega_b)^{\frac{1}{2}} \quad (1.95)$$

et les fréquences ω_k et ω'_k , correspondant respectivement aux zéros et pôles de rang k , sont déterminées par les relations récursives suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega_u}{\omega_h} \right)^{1-\nu} &= \left(\frac{\omega_b}{\omega_u} \right)^{1-\nu} = \frac{1}{\alpha^{N+\frac{1}{2}}} \\ \omega'_0 &= \alpha^{-\frac{1}{2}} \omega_u, \quad \omega_0 = \alpha^{\frac{1}{2}} \omega_u \\ \frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} &= \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \alpha \eta > 1 \\ \frac{\omega_{k+1}}{\omega'_k} &= \alpha > 0, \quad \frac{\omega'_{k+1}}{\omega_k} = \eta > 0 \\ \nu &= \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha \eta)}. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Les rapports α et η , définis dans (1.96), sont appelés facteurs récursifs. Pour obtenir une approximation satisfaisante de $\left(\frac{1}{s^\nu} \right)$ dans la bande $[\omega_A, \omega_B]$, les pulsations ω_b et ω_h sont fixées de part et d'autre de $[\omega_A, \omega_B]$ conformément à $\omega_b = \chi^{-1} \omega_A$ et $\omega_h = \chi \omega_B$, χ étant généralement fixé à 10 ou 100 [Oustaloup, 1995].

La figure 1.12 montre les diagrammes de *Bode* de $\left(\frac{1}{s^\nu} \right)$ et de son approximation $\mathcal{J}_\nu(s)$ dans la bande de fréquences $[\omega_b, \omega_h]$ qui est satisfaisante pour différentes valeurs de $\left(\frac{1}{s^\nu} \right)$; en revanche, l'approximation de la phase se dégrade au voisinage de $\omega_A = 0.01$ et $\omega_B = 100$, dégradation connue sous le nom *d'effet de bord* et pouvant être diminuée en élargissant l'intervalle $[\omega_b, \omega_h]$ par l'intermédiaire de la valeur de χ .


 FIGURE 1.11 – Diagrammes asymptotiques de Bode de $\mathbf{D}(s)$ et $D_N(s)$ pour $\nu \in]0, 1[$

 FIGURE 1.12 – Diagrammes de Bode de $(\frac{1}{s^\nu})$ et de son approximation $\mathcal{J}_\nu(s)$ dans la bande fréquentielle $[10^{-2}, 10^2]$ pour $\nu = 0.2, 0.5$ et 0.8 .

La simulation de la pseudo représentation d'état (1.48) pourra être réalisée à l'aide d'un logiciel de simulation numérique tel que MATLAB/SIMULINK en se servant du schéma bloc de la figure 1.10 faisant apparaître l'approximation $\mathcal{J}_\nu(s)$ donnée par :

$$\mathcal{J}_\nu(s) = C(\nu)D_N(s) \cdot \frac{1}{s}, \quad (1.97)$$

où $C(\nu)$ est donné par (1.92) et où $D_N(s)$ est donné par (1.94-1.96). Le nombre N de pôles et de zéros utilisés résulte d'un compromis entre la précision souhaitée et le temps de simulation. Il est généralement fixé à $N = 5$ par décade apparaissant dans la bande de fréquence $[\omega_b, \omega_h]$. Le choix de ω_b s'effectue par rapport à la durée ΔT du signal d'entrée tandis que ω_h est choisi par rapport à sa période d'échantillonnage T_e , soient :

$$\omega_b = \frac{2\pi}{\Delta T} \quad , \quad \omega_h = \frac{2\pi}{T_e} \quad . \quad (1.98)$$

Remarque 1.3.8 *L'approximation de l'intégrateur non entier par des pôles et des zéros récursifs n'est justifiée que pour un ordre d'intégration $0 < \nu < 1$. En effet, un intégrateur d'ordre $\nu > 1$ peut être approximé par la mise en cascade d'intégrateurs entiers d'ordre 1 et d'un intégrateur d'ordre non entier.*

1.4 – Conclusion

Les paragraphes précédents ont été consacrés à la description de l'opérateur de dérivation non entière et à son utilisation en modélisation. Après avoir introduit l'opérateur d'intégration non entière et ses propriétés, différentes définitions de la dérivation non entière ont été présentées. Les propriétés inhérentes à l'opérateur d'intégration non entière ont permis de relever son aptitude à décrire des phénomènes physiques à mémoire longue tels que les phénomènes de diffusion.

Les modèles non entiers et leurs propriétés ont ensuite été présentés. Bien qu'il soit toujours possible d'exprimer un modèle LTI non entier sous forme d'un jeu d'équations différentielles à dérivées non entières, seuls les modèles non entiers commensurables admettent une pseudo représentation d'état dont la forme est comparable à celle des modèles entiers. S'ils sont utiles notamment en commande, ces modèles sont à manipuler avec précaution lorsqu'il s'agit de calculer la réponse à des conditions initiales ou d'étudier les propriétés liées à l'état telles que la stabilité interne, la commandabilité ou l'observabilité. Une autre représentation des modèles non entiers sur la base d'une décomposition en une partie exponentielle et une partie apériodique a donc été présentée. Celle-ci a l'avantage

de faire apparaître le véritable état d'un modèle non entier et rend bien compte de sa dimension doublement infinie. Cette présentation des modèles non entiers s'est achevée par la méthode utilisée dans ce mémoire pour les simuler : l'approximation par pôles et zéros récurrents des intégrateurs mis en jeu dans la pseudo représentation d'état.

Si les modèles non entiers sont bien adaptés pour rendre compte fidèlement et avec un nombre de paramètres réduit du comportement de nombreux phénomènes physiques, l'étude de leurs propriétés et leur utilisation pour la synthèse de lois de commande nécessite des outils spécifiques. Ainsi, les prochains chapitres s'attachent à proposer de nouvelles méthodes d'analyse et de commande pour ces types de modèles.

Chapitre 2

Formalisation des problèmes

Contents

2.1 – Introduction	49
2.2 – Définition et caractérisation de la stabilité des modèles non entiers	50
2.2.1 – Stabilité Entrée-Sortie	50
2.2.2 – Stabilité interne	53
2.3 – Performances des modèles non entiers	55
2.3.1 – Définitions des normes L_∞ et H_∞	56
2.3.2 – Interprétation physique	57
2.4 – Formalisation des problèmes	57
2.4.1 – Nature du correcteur	58
2.4.2 – Propriétés attendues pour le système bouclé et formulation des problèmes	60
2.5 – Approches proposées	63

2.1 – Introduction

Initialement défini par John Doyle en 1983 [Doyle, 1983], le modèle standard représenté sur la figure 2.1 et élaboré dans le cadre de la théorie de la commande robuste a permis de définir un paradigme formel précis pour l’analyse et la synthèse des systèmes de commande à contre-réaction.

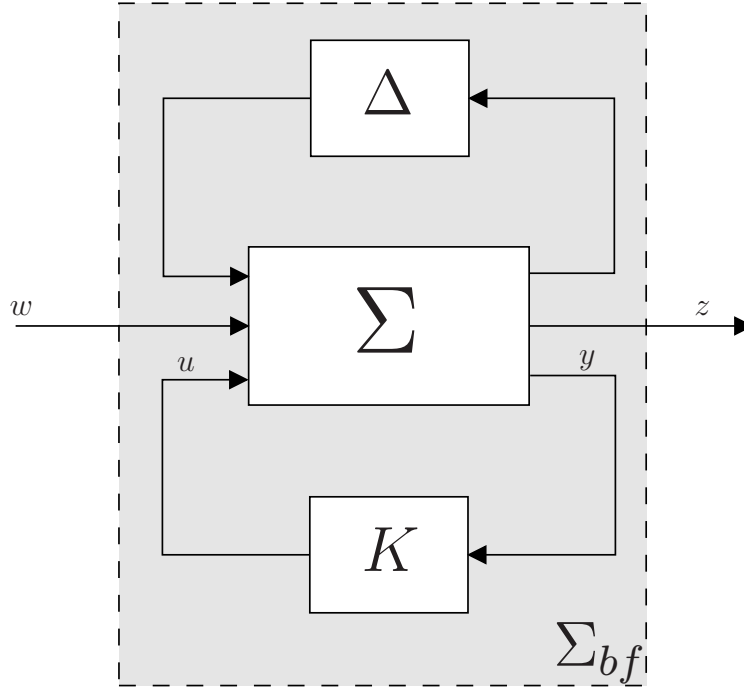


FIGURE 2.1 – Modèle standard pour l’analyse des systèmes de commande à contre-réaction

Le modèle standard propose ainsi de clairement séparer les signaux exogènes d’entrée liés aux perturbations $w \in \mathbb{R}^{m_w}$ et les signaux de commande $u \in \mathbb{R}^m$. De même, les signaux de sortie sont séparés en signaux de sortie mesurés sur le système $y \in \mathbb{R}^p$ et signaux contrôlés ou signaux de performances $z \in \mathbb{R}^{p_z}$.

Le transfert ainsi défini entre w et z doit permettre d’analyser les performances du système de commande en termes de normes systèmes telles que les normes L_∞ et H_∞ . La définition mathématique de ces normes, ainsi que leur sens physique, sont décrits dans la suite de ce chapitre.

L’étude des caractéristiques du système bouclé Σ_{bf} pour un correcteur K donné porte le nom d’analyse. Celle-ci peut porter sur la stabilité, propriété fondamentale du système bouclé, ou sur différents types de performances traduites sous formes de contraintes portant sur le transfert entre w et z de Σ_{bf} .

Si le modèle du système Σ est affecté par des incertitudes Δ , on parle alors d'analyse robuste. Il s'agit donc de garantir les propriétés du système bouclé quelle que soit la valeur des incertitudes Δ appartenant à un certain domaine \mathbb{D} . Le système Σ est modélisé dans ce chapitre, soit par une (pseudo) représentation d'état (§1.3.3), soit en utilisant la représentation diffusive des systèmes non entiers (§1.3.5).

Le but de ce chapitre est de formuler les problèmes de commande que nous souhaitons résoudre dans cette thèse. Pour ce faire, différentes conditions d'analyse permettant d'évaluer la qualité des correcteurs sont présentées, dans le cadre d'une modélisation entière dans un premier temps et non entière ensuite. Ces résultats servent de base au développement des méthodes de synthèse présentées dans les chapitres suivants.

Dans les deux paragraphes suivants sont traités les problèmes d'analyse de stabilité (§2.2) et de performances (§2.3) d'un modèle LTI entier ou non entier. Dans le paragraphe §2.4 sont présentés les problèmes à résoudre dans cette thèse ainsi que le cadre de travail de la commande H_∞ dans lequel ils sont traités. Enfin, les approches développées dans les chapitres 3 et 4 sont annoncées dans le paragraphe §2.5.

2.2 – Définition et caractérisation de la stabilité des modèles non entiers

La stabilité est une notion dont l'importance pour la commande de systèmes dynamiques est connue depuis les débuts de l'automatique [Lyapunov, 1892, Remaud et Trigassou, 2006] et qui peut être quantifiée de différentes manières. Ce paragraphe s'articule donc autour de la définition de la stabilité d'un système dynamique et de la présentation des théorèmes importants pour l'évaluer. Ces théorèmes sont classés en deux catégories : ceux exprimant la stabilité entrée-sortie d'un système dynamique et ceux exprimant la stabilité interne.

2.2.1 – Stabilité Entrée-Sortie

2.2.1.1 – Définition

La stabilité entrée-sortie est également appelée stabilité externe. En effet, un système est dit stable du point de vue entrée-sortie si lorsque ses entrées sont bornées, ses sorties le sont aussi, ou encore, si lorsque l'énergie de ses entrées est bornée, l'énergie de ses sorties

l'est aussi. Une interprétation mathématique de la stabilité entrée-sortie, dans laquelle un système est caractérisé par son gain dans l'espace \mathcal{L}_q , est donnée par la définition qui suit.

Définition 2.2.1 (Stabilité entrée-sortie [Khalil, 2000]) *Un système Σ d'entrée u et de sortie y , associé à une matrice de transfert $G(s)$, est dit \mathcal{L}_q -stable, $1 < q < \infty$, si et seulement si :*

$$\sup_{u \in \mathcal{L}_q, u \neq 0} \frac{\|g * u\|_p}{\|u\|_p} < \infty \quad , \quad (2.1)$$

où $g(t)$ représente la matrice de réponse impulsionnelle du système.

Lorsque la norme L_∞ est utilisée dans la définition précédente, on parle alors de stabilité BIBO (Bounded Input Bounded Output). Dans le cas des modèles non entiers, la stabilité BIBO a notamment été utilisée dans les travaux de Matignon et sa définition est rappelée ici.

Définition 2.2.2 (Stabilité BIBO [Matignon, 1996]) *Un système LTI non entier de réponse impulsionnelle g est BIBO stable si et seulement si $\forall u \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p)$, $y = g * u \in \mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^m)$.*

2.2.1.2 – Caractérisation à partir de la matrice de transfert

Différentes méthodes permettent d'évaluer la stabilité entrée-sortie d'un système dynamique selon la définition utilisée (stabilité \mathcal{L}_q ou stabilité BIBO).

Si l'on utilise la définition 2.2.2, il est bien connu qu'un modèle entier est BIBO stable si et seulement si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative. Ce résultat a été étendu au cas des systèmes non entiers comme rappelé dans [Bonnet et Partington, 2000].

Théorème 2.2.3 (Caractérisation de la stabilité BIBO à partir de la fonction de transfert [Bonnet et Partington, 2000]) *Soit un modèle non entier strictement propre décrit par sa fonction de transfert :*

$$G(s) = \frac{\sum_i a_i s^{\alpha_i}}{\sum_i b_i s^{\beta_i}} = \frac{A(s)}{B(s)}, \quad (2.2)$$

où $A(s)$ et $B(s)$ n'ont aucune racine commune. Alors G est BIBO stable si et seulement si G n'a pas de pôle dans $\{\Re(s) \geq 0\}$, c'est-à-dire si $\Re(s_i) < 0 \forall i$ où s_i désigne la i -ème racine de $B(s)$. ■

2.2.1.3 – Caractérisation à partir de la pseudo représentation d'état

Comme mentionné dans le chapitre 1, sous les hypothèses de non compensation de pôles et zéros, les s^ν pôles d'un modèle non entier commensurable sont également les valeurs propres de la matrice dynamique A de la pseudo représentation d'état. Ainsi la pseudo représentation d'état peut être utilisée pour étudier la stabilité entrée-sortie.

Théorème 2.2.4 (Caractérisation de la stabilité BIBO à partir de la pseudo représentation d'état [Matignon, 1998]) *Un modèle non entier commensurable d'ordre $0 < \nu < 1$ défini par la pseudo représentation d'état*

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\nu x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad (2.3)$$

est BIBO stable si :

$$|\arg(\text{eig}(A))| > \nu \frac{\pi}{2}. \quad (2.4)$$

Si le triplet (A, B, C) est minimal, alors la relation (2.4) est une condition nécessaire et suffisante de stabilité BIBO. ■

Ce théorème est aussi valide pour $1 < \nu < 2$ [Sabatier et al., 2008b]. Le domaine de stabilité d'un système LTI non entier commensurable est donc défini par :

$$\mathcal{D}_s = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| > \nu \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (2.5)$$

Il est représenté sur la figure 2.2.

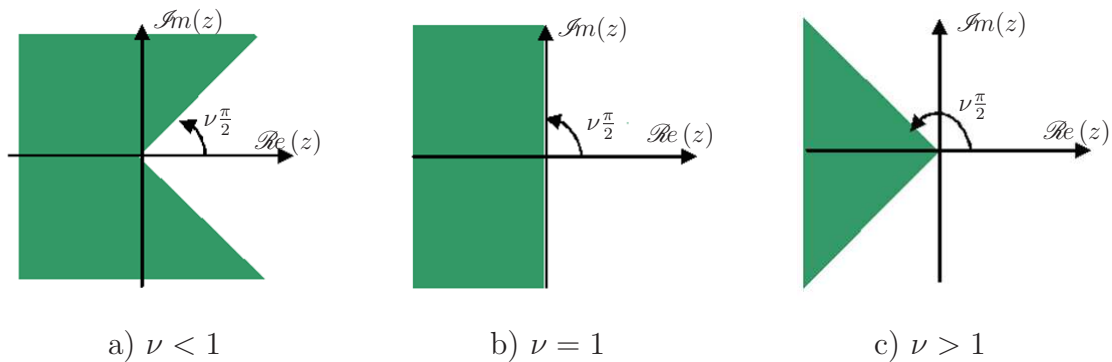


FIGURE 2.2 – Région de stabilité (domaine vert) d'un modèle non entier commensurable

Pour un ordre de dérivation entier ($\nu = 1$), le domaine de stabilité d'un modèle entier est retrouvé, à savoir le demi-plan gauche, comme indiqué sur la figure 2.2.b. Quand ν

augmente, la région de stabilité diminue jusqu'à tendre vers le demi-axe \mathbb{R}^{*-} quand l'ordre commensurable tend vers 2. Pour un ordre $\nu > 2$, la région de stabilité est un ensemble vide. Le système est alors instable quels que soient les pôles en s^ν de sa fonction de transfert (ou les valeurs propres de la matrice A).

2.2.2 – Stabilité interne

La stabilité interne est classiquement étudiée, pour les modèles entiers, à partir de leur représentation d'état. Aussi nous rappelons, dans un premier temps, les définitions et la caractérisation de la stabilité au sens de *Lyapunov* dans le cas d'une représentation d'état entière. Nous étudions, dans un second temps, comment peut s'exprimer la stabilité interne d'un modèle non entier.

2.2.2.1 – Cas particulier des modèles entiers

La stabilité interne s'intéresse à la convergence de l'état du système vers des points (ou états) d'équilibre. Par définition, un état d'équilibre est un état que le système occupe indéfiniment en l'absence de modification de ses entrées. Analyser la stabilité interne d'un système dynamique revient ainsi à étudier son régime libre en présence de conditions initiales proches d'un état d'équilibre. Dans le cas d'un modèle entier, ce régime libre est régi par le système différentiel homogène :

$$\dot{x}(t) = f(x, t), \quad (2.6)$$

avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $t > t_0$, t_0 étant l'instant initial tel que $x(t_0) = x_0$.

Définition 2.2.5 (Point d'équilibre [Narendra et Taylor, 1973]) *Un point x_e de l'espace d'état est un point d'équilibre (ou état d'équilibre) du système (2.6) si :*

$$f(x_e, t) = 0, \quad \forall t > t_0. \quad (2.7)$$

Puisque les systèmes étudiés sont linéaires, il sera considéré par la suite un unique point d'équilibre localisé à l'origine de l'espace d'état : $x_e = 0$, c'est-à-dire :

$$f(0, t) = 0, \quad \forall t > t_0. \quad (2.8)$$

Cette hypothèse n'est pas restrictive puisque le point d'équilibre peut toujours être ramené à l'origine par translation.

Différentes formes de stabilité interne sont associées aux définitions précédentes. Elles se différencient notamment par les conditions initiales considérées et le type de convergence vers le point d'équilibre. La définition retenue dans ce mémoire est celle de la stabilité asymptotique uniforme globale introduite par *Lyapunov*.

Définition 2.2.6 (Stabilité asymptotique uniforme globale [Khalil, 2000]) *Le point d'équilibre $x_e = 0$ est*

— *uniformément stable si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, indépendant de t_0 , tel que :*

$$\|x(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0. \quad (2.9)$$

— *globalement uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et que, $\forall \varepsilon > 0$ et $\forall \alpha > 0$, il existe $\tau = \tau(\varepsilon, \alpha) > 0$ tel que :*

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + \tau, \quad \forall \|x(t_0)\| < \alpha. \quad (2.10)$$

On peut remarquer que la stabilité asymptotique globale garantit la convergence de $x(t)$ vers 0 quelle que soit sa valeur initiale x_0 .

Remarque 2.2.7 *Par abus de langage, dans la suite de ce mémoire, un modèle linéaire sera dit stable au sens de Lyapunov lorsque le point d'équilibre $x_e = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.*

Partant de l'étude des systèmes mécaniques, *Lyapunov* développa une théorie mathématique [Lyapunov, 1892] permettant de déterminer la stabilité d'un point d'équilibre sans pour autant devoir intégrer les équations différentielles associées au système. Cette méthode est basée sur la constatation intuitive suivante : si l'énergie du système est dissipée au cours du temps, alors le système tend vers un état d'équilibre. Cette méthode, aussi connu sous le nom de seconde méthode de *Lyapunov*, permet d'analyser la stabilité asymptotique uniforme globale d'un système autonome de régime libre régi par le système différentiel :

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.11)$$

Théorème 2.2.8 (2^{de} méthode de *Lyapunov* [Lyapunov, 1892]) *Le modèle (2.11) est stable au sens de Lyapunov si et seulement s'il existe une fonction continûment différentiable (ou différentiable par parties et à sauts bornés) V , à valeurs dans \mathbb{R} et définie sur \mathbb{R}^n , telle que :*

— $V(0) = 0$

- $V(x) > 0, \forall x \neq 0$
- $V(x) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$
- $\dot{V}(x) < 0, \forall x \neq 0.$ ■

Une fonction vérifiant les trois premières hypothèses du théorème 2.2.8 est appelée “fonction candidate”. Elle devient une “fonction de *Lyapunov*” si elle vérifie également la dernière hypothèse.

2.2.2.2 – Généralisation aux modèles non entiers

La seconde méthode de *Lyapunov* est un outil puissant pour l’analyse de la stabilité interne des modèles entiers mais elle n’est pas applicable à la pseudo représentation d’état des systèmes non entiers. En effet, comme il a été montré dans le chapitre 1 (§1.3.3), si l’on considère un modèle non entier commensurable Σ d’ordre ν , défini par la pseudo représentation d’état :

$$\begin{cases} \mathbf{D}^\nu x(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{cases}, \quad (2.12)$$

le vecteur $x(t)$ n’est pas le véritable état du système car la connaissance de $x(t_0)$ à un instant t_0 n’est pas suffisante pour évaluer $x(t)$ à un instant $t > t_0$. Trouver une fonction $V(x)$ vérifiant les hypothèses du théorème 2.2.8 ne garantit donc pas la stabilité interne du système G .

Il est néanmoins possible d’étudier la stabilité interne d’un modèle non entier à l’aide de sa représentation diffusive (§1.3.5). En effet, celle-ci fait apparaître le véritable état du système en combinant l’état $\Phi(\zeta, t)$ de la partie apériodique et l’état $\eta(t)$ de la partie entière. Le théorème 2.2.8 est donc applicable à une telle représentation. Le lecteur intéressé pourra se référer notamment à la référence [Trigeassou *et al.*, 2011] pour une discussion détaillée autour de cette approche. Plus de détails concernant la représentation d’état des modèles non entiers et leur initialisation peuvent être trouvés dans [Trigeassou et Maamri, 2009].

2.3 – Performances des modèles non entiers

La caractéristique élémentaire attendue d’un système est qu’il soit stable. Mais au delà de la stabilité, le problème qui intéresse l’automaticien, est de caractériser et

d'améliorer les performances du système étudié. Ces performances peuvent être notamment caractérisées en termes d'atténuation des perturbations ou d'amélioration du suivi de consigne. Ces différents problèmes peuvent être traités dans le cadre de la commande H_∞ faisant appel à l'écriture du problème sous la forme standard du schéma 2.1. Les performances du système peuvent alors être étudiées à l'aide de critères de coût caractérisant l'influence des entrées exogènes w sur les sorties de performances z . Dans ce mémoire, ces coûts sont exprimés à l'aide des normes systèmes H_∞ et L_∞ définies dans les paragraphes suivants.

2.3.1 – Définitions des normes L_∞ et H_∞

Les performances du système sont étudiées à l'aide des normes L_∞ et H_∞ du transfert T_{zw} entre les entrées et sorties exogènes. Ces normes se définissent de la même manière qu'il s'agisse d'un modèle entier ou non entier.

Définition 2.3.1 (Norme L_∞ [Green et Limebeer, 1995]) *La norme L_∞ du transfert T_{zw} est définie par :*

$$\|T_{zw}(s)\|_{L_\infty} := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega)), \quad (2.13)$$

où $\bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega))$ est la plus grande valeur singulière de $T_{zw}(j\omega)$ à la pulsation ω .

Définition 2.3.2 (Norme H_∞ [Green et Limebeer, 1995]) *La norme H_∞ du transfert T_{zw} est définie par :*

$$\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} := \sup_{\text{Re}(s) \geq 0} \bar{\sigma}(T_{zw}(s)). \quad (2.14)$$

Il est important de noter que si $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty}$ est finie, alors le système Σ est BIBO stable.

Théorème 2.3.3 (Normes L_∞ et H_∞ d'un système stable [Green et Limebeer, 1995]) *Les normes L_∞ et H_∞ d'un système Σ stable sont égales :*

$$\Sigma \text{ stable} \Rightarrow \|T_{zw}(s)\|_{L_\infty} = \|T_{zw}(s)\|_{H_\infty}. \quad (2.15)$$

■

De ce fait, deux approches sont possibles en analyse pour calculer la norme H_∞ d'un système. La première approche se déroule en deux temps. D'abord la stabilité du système

est évaluée. Si le système est stable, alors sa norme H_∞ peut être calculée en utilisant la définition 2.3.1 et le théorème 2.3.3. Sinon, sa norme H_∞ est infinie. La seconde approche consiste à calculer directement la norme H_∞ du système en utilisant la définition 2.3.2.

Nous verrons dans les chapitres qui suivent que les méthodes de calcul de la norme H_∞ basées sur ces deux approches peuvent présenter des degrés de pessimisme différents et conduire soit à la valeur exacte de la norme H_∞ , soit à des bornes supérieures sur sa valeur.

2.3.2 – Interprétation physique

Considérons un système Σ BIBO stable. D'après le théorème 2.3.3, on peut écrire :

$$\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} = \sup_{\text{Re}(s) \geq 0} \bar{\sigma}(T_{zw}(s)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega)). \quad (2.16)$$

La réponse en régime permanent de la matrice de transfert $T_{zw}(s)$ au signal d'entrée sinusoïdal $w(j\omega)$ est donnée par $z(j\omega) = T_{zw}(j\omega)w(j\omega)$. A la pulsation ω , le plus grand gain $\|z(j\omega)\|_2 / \|w(j\omega)\|_2$, fonction de l'orientation du vecteur $w(j\omega)$, est donné par :

$$\bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega)) = \max_{w(j\omega) \neq 0} \frac{\|z(j\omega)\|_2}{\|w(j\omega)\|_2}. \quad (2.17)$$

Dans le pire des cas, le plus grand gain sur l'ensemble des fréquences est donné par la norme H_∞ du transfert T_{zw} , soit :

$$\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \max_{w(j\omega) \neq 0} \frac{\|z(j\omega)\|_2}{\|w(j\omega)\|_2}. \quad (2.18)$$

Dans le domaine temporel, l'équation (2.18) s'écrit :

$$\|T_{zw}(t)\|_{H_\infty} = \max_{w(t) \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} = \max_{\|w(t)\|_2=1} \|z(t)\|_2. \quad (2.19)$$

Par conséquent, dans le domaine temporel, la norme H_∞ correspond à l'énergie la plus importante des signaux de sortie générés par des entrées d'énergie unitaire. L'interprétation physique de la norme H_∞ pour les systèmes entiers et les systèmes non entiers est donc la même tant du point de vue fréquentiel que temporel.

2.4 – Formalisation des problèmes

L'objectif de cette thèse est d'étendre le cadre de la commande H_∞ aux modèles non entiers. Les correcteurs obtenus doivent permettre au système bouclé de vérifier des

contraintes de stabilité et de performances exprimées à l'aide de critères basés sur les normes L_∞ et H_∞ . Comme annoncé dans la partie précédente, ces critères font appel à l'écriture du modèle sous forme du schéma standard de la figure 2.1. Ce modèle peut s'écrire comme une pseudo représentation d'état de la forme :

$$\Sigma \begin{cases} D^\nu x(t) &= A x(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yu} u(t) + D_{yw} w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t) \end{cases} \quad (2.20)$$

où $x(t)$ est le pseudo vecteur d'état, $u(t)$ est le vecteur de commande, $w(t)$ et $z(t)$ les vecteurs d'entrées et sorties de performances et $y(t)$ le vecteur de mesure.

Cette partie est organisée comme suit. Les différents types de correcteurs considérés sont présentés dans un premier temps. Les problèmes à résoudre sont ensuite énoncés. Enfin, les approches pour résoudre ces problèmes, développées dans les chapitres suivants, sont annoncées.

2.4.1 – Nature du correcteur

Deux natures de correcteurs sont considérées dans ce mémoire : statique ou dynamique.

2.4.1.1 – Retour d'état

Lorsque toutes les pseudo variables d'état x_i sont mesurées, une loi de commande par retour d'état peut être utilisée. Dans ce cas particulier, le vecteur des sorties mesurées vaut $y(t) = x(t)$.

Définition 2.4.1 (Retour d'état) *Une loi de commande par retour d'état est une loi de commande de la forme :*

$$u(t) = K_{re} x(t) \quad (2.21)$$

où $K_{re} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ est un gain matriciel constant.

La représentation d'état du modèle (2.20) bouclé par la loi de commande (2.21) s'écrit :

$$\Sigma_{BF}(K_{re}) \begin{cases} D^\nu x(t) &= (A + B_u K_{re})x(t) + B_w w(t) = \mathcal{A}(K_{re})x(t) + \mathcal{B}w(t) \\ z(t) &= (C_z + D_{zu} K_{re})x(t) + D_{zw} w(t) = \mathcal{C}(K_{re})x(t) + \mathcal{D}w(t) \end{cases} \quad (2.22)$$

2.4.1.2 – Retour de sortie dynamique

Lorsque toutes les pseudo variables d'état x_i ne sont pas mesurées, il est nécessaire d'utiliser une loi de commande par retour de sortie. Dans ce cas, il convient de discuter l'ordre du correcteur à mettre en œuvre. En effet, alors qu'il est inutile dans le cas d'un retour d'état de considérer une loi de commande dynamique, l'ordre du correcteur utilisé dans un retour de sortie a une influence sur les performances atteignables. Dans ce mémoire, nous nous limiterons aux correcteurs par retour de sortie dynamique d'ordre plein, c'est-à-dire d'ordre égal à celui du modèle. En effet, il n'existe pas de condition nécessaire et suffisante pour l'existence et la synthèse de correcteurs d'ordre réduit dans le cas des modèles entiers.

Deux principales approches sont possibles pour la synthèse d'un retour de sortie d'ordre plein dans le cas d'un modèle entier.

La première consiste à mettre en œuvre un observateur permettant de reconstruire l'état du système. Or comme mentionné précédemment, le vecteur $x(t)$ dans la représentation (2.20) n'est pas l'état du système. En réalité, comme montré à l'aide de la représentation diffusive dans [Sabatier *et al.*, 2012], l'état du modèle non entier n'est pas exactement observable mais uniquement approximativement observable. Toutefois, il est également démontré dans cet article qu'un estimateur du pseudo état $x(t)$ peut être développé à partir de la pseudo représentation d'état et que ce dernier peut être utilisé dans le cadre d'une commande par retour de pseudo état estimé. L'association du retour d'état estimé et de l'estimateur constitue alors la loi de commande par retour de sortie dynamique.

La seconde approche, qui est celle utilisée dans ce mémoire, vise à réaliser la synthèse directe de la loi de commande par retour de sortie dynamique.

Définition 2.4.2 (Retour de sortie dynamique) *Un correcteur par retour de sortie dynamique est un système dynamique, interconnecté entre la sortie du système à commander et son entrée, de pseudo représentation d'état :*

$$K_{rsd} \begin{cases} D^{\nu_K} x_K(t) &= A_K x_K(t) + B_K y(t) \\ u(t) &= C_K x_K(t) + D_K y(t) \end{cases} \quad (2.23)$$

où x_K et ν_K représentent respectivement le pseudo vecteur d'état et l'ordre du correcteur.

Dans la définition ci-dessus, un degré de liberté supplémentaire apparaît dans le cas non entier : l'ordre non entier de la loi de commande ν_K . Dans le cadre des travaux

présentés dans ce mémoire, les méthodes développées pourront conduire à des correcteurs d'ordre entier ($\nu_K = 1$) ou non entier, de même ordre que celui du modèle considéré ($\nu_K = \nu$). Dans ce dernier cas, la représentation d'état du modèle (2.20) bouclé par la loi de commande (2.23) s'écrit :

$$\Sigma_{BF}(K_{rsd}) \begin{cases} \mathbf{D}^\nu \tilde{x}(t) &= \mathcal{A}(K_{rsd})\tilde{x}(t) + \mathcal{B}(K_{rsd})w(t) \\ z(t) &= \mathcal{C}(K_{rsd})\tilde{x}(t) + \mathcal{D}(K_{rsd})w(t) \end{cases} \quad (2.24)$$

où $\tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} x^T(t) & x_K^T(t) \end{bmatrix}^T$ est le pseudo vecteur d'état du système bouclé et les matrices de cette représentation d'état sont données par :

$$\mathcal{A}(K_{rsd}) = \begin{bmatrix} A + BD_K C & BC_K \\ B_K C & A_K \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$$\mathcal{B}(K_{rsd}) = \begin{bmatrix} B_w + BD_K D_w \\ B_K D_w \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

$$\mathcal{C}(K_{rsd}) = \begin{bmatrix} C_z + D_z D_K C & D_z C_K \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

et

$$\mathcal{D}(K_{rsd}) = D_{zw} + D_z D_K D_w. \quad (2.28)$$

2.4.2 – Propriétés attendues pour le système bouclé et formulation des problèmes

Une fois le type de correcteur choisi, il convient de formuler les propriétés que doit conférer ce correcteur au système bouclé. Les propriétés attendues sont celles qui ont été étudiées dans les parties précédentes, à savoir notamment la stabilité et les performances temporelles et en rejet de perturbations. Dans cette partie sont formulés les différents problèmes de synthèse associés à ces propriétés. Les problèmes sont énoncés de manière générique pour un correcteur K , qui peut être de nature statique (dans le cas d'un retour d'état) ou dynamique (dans le cas d'un retour de sortie).

2.4.2.1 – Stabilité

La caractéristique minimale attendue d'un correcteur est d'assurer la stabilité de la boucle fermée. Pour un type de loi de commande donné, la stabilité de la boucle fermée n'est pas nécessairement atteignable. Ainsi, la stabilisabilité est définie relativement à la

classe de correcteurs choisie. Notons \mathbb{K} l'ensemble des correcteurs (stabilisants ou non) pour une loi de commande donnée.

Définition 2.4.3 (Stabilisabilité) *Un système Σ est stabilisable par une loi de commande K si et seulement s'il existe une valeur des paramètres du correcteur tel que le système bouclé soit stable :*

$$\Sigma \text{ stabilisable} \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{K} \text{ t.q. } \Sigma_{BF}(K) \text{ stable.}$$

Dans le cadre général de la commande H_∞ défini pour les systèmes entiers, le système bouclé doit être stable du point de vue de la stabilité interne. Dans le cadre de notre étude basée sur un modèle du type pseudo-représentation d'état, ce type de stabilité ne peut être garanti. Aussi, le correcteur ne doit pas ici assurer la stabilité interne du système bouclé mais garantir la stabilité BIBO entre la référence et la sortie mesurée, sachant que l'entrée de référence fait partie des entrées de performances w dans le cadre des différents problèmes traités dans ce mémoire. La stabilité BIBO de ce transfert est alors assurée selon le résultat du théorème 2.2.4 par la contrainte suivante sur la matrice dynamique du système bouclé :

$$|\arg(\text{eig}(\mathcal{A}(K)))| > \nu \frac{\pi}{2}. \quad (2.29)$$

Définition 2.4.4 (Ensemble des correcteurs stabilisants) *L'ensemble des correcteurs stabilisants pour une loi de commande de type \mathbb{K} est noté $\mathbb{K}_{st} \subset \mathbb{K}$:*

$$\mathbb{K}_{st} = \{K \in \mathbb{K} \text{ t.q. } \Sigma * K \text{ stable}\} \quad (2.30)$$

où, d'après le théorème 2.2.4 :

$$\mathbb{K}_{st} = \{K \in \mathbb{K} \text{ t.q. } |\arg(\text{eig}(\mathcal{A}(K)))| > \nu \frac{\pi}{2}\}. \quad (2.31)$$

2.4.2.2 – Performances

Comme annoncé dans la partie 2.3, les performances de la loi de commande sont évaluées via le calcul des normes L_∞ et H_∞ du transfert T_{zw} du système bouclé dont la pseudo représentation d'état est donnée par (2.22) dans le cas d'un retour d'état ou (2.24) dans le cas d'un retour de sortie.

Le choix des matrices de performances (B_w , C_z , D_{zu} et D_{zw}) dépend du problème considéré. Dans ce mémoire, le choix de ces matrices correspond à des gabarits fréquentiels imposés à différents transfert du système. Les lecteur intéressé pourra se référer par

exemple à [Duc et Font, 1999] pour le choix des formes de ces gabarits et leur impact sur les performances du système bouclé.

Une fois les gabarits choisis en fonction d'un cahier des charges donné, il s'agit de déterminer une loi de commande K stabilisante et assurant :

$$\|T_{zw}(K, s)\|_{\infty} < 1 \quad , \quad (2.32)$$

où $T_{zw}(K, s)$ désigne le transfert de performances du système bouclé.

Si une telle loi de commande existe, alors les transferts du système bouclé vérifient les contraintes imposées par les gabarits.

De manière générale, la démarche est itérative et consiste dans un premier temps à formuler un problème d'optimisation dont les variables sont les paramètres du correcteur et le critère à minimiser est la norme H_{∞} du transfert T_{zw} . Si l'inégalité (2.32) n'est pas satisfaite, alors des contraintes sont relâchées en agissant sur la forme des gabarits et un nouveau problème d'optimisation est lancé.

Ainsi, les différents problèmes de performances formulés dans cette thèse passeront par la résolution d'un problème d'optimisation de la forme suivante :

Problème 2.4.5 (Critères pour la synthèse d'un correcteur par approche H_{∞})

Déterminer une loi de commande K , statique (2.21) ou dynamique (2.23) :

— *assurant la stabilité BIBO du système bouclé, c'est-à-dire vérifiant :*

$$|\arg(\text{eig}(\mathcal{A}(K)))| > \nu \frac{\pi}{2} \quad (2.33)$$

— *minimisant la norme H_{∞} du transfert T_{zw} du système bouclé :*

$$\min_K \|T_{zw}(s, K)\|_{H_{\infty}}. \quad (2.34)$$

A l'aide des notations introduites précédemment, le problème peut également être formulé de manière plus compacte comme suit :

Problème 2.4.6 (Synthèse d'un correcteur par approche H_{∞}) *Déterminer une loi de commande K , statique (2.21) ou dynamique (2.23) telle que :*

$$K = \arg \min_{K \in \mathbb{K}} \|T_{zw}(K, s)\|_{H_{\infty}} = \arg \min_{K \in \mathbb{K}_{st}} \|T_{zw}(K, s)\|_{L_{\infty}}. \quad (2.35)$$

2.5 – Approches proposées

Deux approches sont utilisées dans ce mémoire pour résoudre les problèmes de commande H_∞ par retour d'état et par retour de sortie. Ces deux approches diffèrent par la représentation des modèles non entiers utilisée.

Dans la première approche, le système Σ est modélisé en utilisant la décomposition d'un modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique. Rappelons que cette représentation permet d'écrire le modèle non entier comme l'interconnexion d'un modèle entier et d'un modèle parabolique. La partie apériodique est ici traitée comme une incertitude affectant la partie entière. Le problème de commande H_∞ du modèle non entier est alors reformulé comme un problème de commande robuste d'un modèle entier incertain. Ainsi, les méthodes de commande robuste développées dans le cas des modèles entiers peuvent être réutilisées et conduisent à la synthèse de correcteurs d'ordre entier. L'inconvénient de cette approche est l'introduction d'un certain pessimisme conduisant à l'obtention de correcteurs sous optimaux.

La seconde approche fait appel à la pseudo représentation d'état des modèles non entiers. Les méthodes spécifiques développées en utilisant cette approche permettent d'analyser la stabilité du modèle non entier et de déterminer sans pessimisme sa norme H_∞ car aucune approximation de modèle n'est utilisée. Ces méthodes d'analyse sont la base de méthodes de commande H_∞ conduisant à la synthèse de correcteurs d'ordre non entier, de même ordre commensurable que celui du modèle considéré.

Dans ces deux approches, la stabilité et les performances sont évaluées en utilisant des inégalités matricielles linéaires (LMI) (cf. annexe A).

Chapitre 3

Commande H_∞ basée sur la décomposition d'un modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique

Contents

3.1 – Introduction	67
3.2 – Approximation d'un modèle non entier en le décomposant en une partie exponentielle et une partie apériodique	68
3.2.1 – Réponse impulsionnelle et représentation d'un modèle non entier	68
3.2.2 – Traitement de la partie apériodique comme une incertitude	70
3.2.3 – Réduction de l'incertitude par inclusion d'une partie du comportement apériodique dans le modèle nominal	71
3.3 – Commande H_∞ d'un modèle non entier représenté à partir de sa partie exponentielle et de sa partie apériodique	85
3.3.1 – Analyse en stabilité et en performances	85
3.3.2 – Commande H_∞	86
3.4 – Application	88
3.5 – Conclusion	92

3.1 – Introduction

Pour traiter un problème de commande impliquant un système dynamique décrit par un modèle non entier, une approche simple consiste à l'approximer par un modèle entier, à l'aide par exemple de l'approximation par pôles et zéros récurrents décrite au paragraphe 1.3.6. Les méthodes de synthèse de correcteurs développées dans le cas entier, par exemple la commande H_∞ , peuvent alors être utilisées.

Une telle approche présente un intérêt puisqu'elle ne nécessite pas le développement de nouvelles méthodes de synthèse. Cependant, si l'erreur d'approximation n'est pas prise en compte, cette méthode ne permet pas de garantir l'optimalité du correcteur vis-à-vis du modèle non entier de départ, ni même de garantir un niveau de performances souhaité.

Ainsi, comme annoncé à la fin du chapitre 2, nous proposons ici de décrire le modèle non entier $H(s)$ comme un modèle entier $H_0(s)$ affecté d'une incertitude dynamique $\delta(s)$ (figure 3.1). Le modèle non entier initial est alors vu comme une réalisation du modèle entier incertain $H^i(s) = F_u(H_0(s), \delta(s))$ pour une valeur donnée de $\delta(s)$.

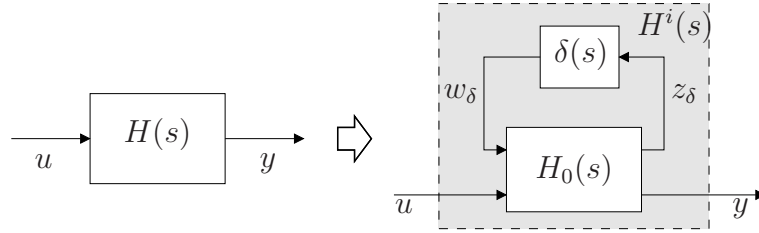


FIGURE 3.1 – Description d'un modèle non entier comme un modèle entier incertain

Les techniques de commande robuste développées dans le cas entier peuvent alors être utilisées afin de déterminer un correcteur permettant d'assurer un niveau de performances garanti, quelle que soit la valeur de $\delta(s) \in \mathbb{D}$ (où \mathbb{D} représente l'ensemble incertain). Ce niveau de performances est ici mesuré au travers de la norme H_∞ du transfert $T_{zw}(s)$ du système entier augmenté des fonctions de pondération, noté $H_0^{aug}(s)$, selon la méthodologie décrite au paragraphe 2.4.2.2 (figure 3.2).

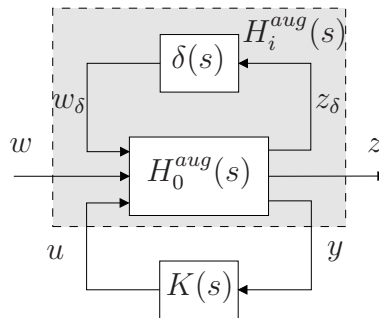


FIGURE 3.2 – Synthèse du correcteur $K(s)$ sur le modèle entier incertain $H_i^{aug}(s)$

Il est clair que plus l'ensemble incertain \mathbb{D} sera réduit, meilleur sera le niveau de performances atteignable. Se pose donc la question de la détermination du modèle incertain $H^i(s)$, et en particulier du modèle nominal entier $H_0(s)$. Dans ce travail, notre choix s'est porté sur la décomposition d'un modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique introduite dans le premier chapitre. En effet, cette dernière décrit naturellement le modèle non entier comme l'interconnexion d'un modèle entier et d'un modèle parabolique.

Dans une première partie, cette décomposition est mise à profit pour reformuler un modèle non entier comme un modèle entier incertain. Dans une seconde partie, il est démontré que ce modèle entier incertain peut être utilisé pour l'analyse en stabilité et performances ainsi que pour la commande H_∞ du modèle non entier. Un même exemple académique est utilisé dans chaque partie afin d'illustrer la méthodologie proposée.

3.2 – Approximation d'un modèle non entier en le décomposant en une partie exponentielle et une partie apériodique

Ce paragraphe présente une méthodologie basée sur l'approximation de la partie apériodique permettant de réécrire un modèle non entier comme un modèle entier incertain. Lors du développement du modèle incertain, nous nous attacherons à minimiser la taille de l'incertitude qui caractérise l'erreur d'approximation.

Afin de ne pas alourdir inutilement les développements, seuls des modèles monovariés sont ici considérés. L'extension de ces résultats au cas multivariable reste néanmoins possible.

3.2.1 – Réponse impulsionnelle et représentation d'un modèle non entier

Soit $H(s)$ une fonction de transfert reliant l'entrée $u(t)$ et la sortie $y(t)$ d'un modèle non entier et définie par :

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{l=0}^q q_l s^{\beta_l}}{\sum_{k=0}^m r_k s^{\alpha_k}}, \quad (3.1)$$

avec $\beta_{l+1} \geq \beta_l \geq 0$ et $\alpha_{k+1} \geq \alpha_k \geq 0$. La décomposition en éléments simples de $H(s)$ est donnée par la relation :

$$H(s) = \sum_{l=1}^r \sum_{q=1}^{n_l} \left(\frac{1}{(s^\nu - \lambda_l)} \right)^q = \sum_{l=1}^r \sum_{q=1}^{n_l} H^{\lambda_l, q}(s). \quad (3.2)$$

où λ_l , $l \in \{1 \dots r\}$ sont les r s^ν -pôles de $H(s)$ de multiplicité $q \in \{1 \dots n_l\}$.

Comme il a été montré dans le chapitre 1, chaque mode $h^{\lambda_l, q}(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H^{\lambda_l, q}(s)\}$ se décompose en une partie exponentielle et une partie apériodique, soit :

$$h^{\lambda_l, q}(t) = h_{exp}^{\lambda_l, q}(t) + h_{ap}^{\lambda_l, q}(t). \quad (3.3)$$

La partie exponentielle $h_{exp}^{\lambda_l, q}(t)$ est donnée par (1.66–1.67). La partie apériodique $h_{ap}^{\lambda_l, q}(t)$ est quant à elle donnée par (1.69–1.70). La réponse impulsionnelle $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \{H(s)\}$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_l \sum_q h^{\lambda_l, q}(t) \\ &= \sum_l \sum_q (h_{exp}^{\lambda_l, q}(t) + h_{ap}^{\lambda_l, q}(t)) \\ &= \sum_l \sum_q h_{exp}^{\lambda_l, q}(t) + \sum_l \sum_q h_{ap}^{\lambda_l, q}(t) \\ &= \sum_l \sum_q h_{exp}^{\lambda_l, q}(t) + \sum_l \sum_q \int_0^{+\infty} \mu^{\lambda_l, q}(\chi) e^{-t\chi} d\chi \\ &= \sum_l \sum_q h_{exp}^{\lambda_l, q}(t) + \int_0^{+\infty} \sum_l \sum_q \mu^{\lambda_l, q}(\chi) e^{-t\chi} d\chi \end{aligned} \quad (3.4)$$

soit :

$$h(t) = h_{exp}(t) + h_{ap}(t), \quad (3.5)$$

où $h_{exp}(t)$ et $h_{ap}(t)$ s'écrivent comme la somme des réponses impulsionnelles associées à chaque mode, c'est-à-dire :

$$h_{exp}(t) = \sum_l \sum_q h_{exp}^{\lambda_l, q}(t) \quad (3.6)$$

et

$$h_{ap}(t) = \int_0^{+\infty} \mu(\chi) e^{-t\chi} d\chi \quad (3.7)$$

avec

$$\mu(\chi) = \sum_l \sum_q \mu^{\lambda_l, q}(\chi). \quad (3.8)$$

Le schéma bloc associé au modèle non entier

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{h_{exp}(t)\} + \mathcal{L}\{h_{ap}(t)\} = H_{exp}(s) + H_{ap}(s) \quad (3.9)$$

est représenté sur la figure 3.3.

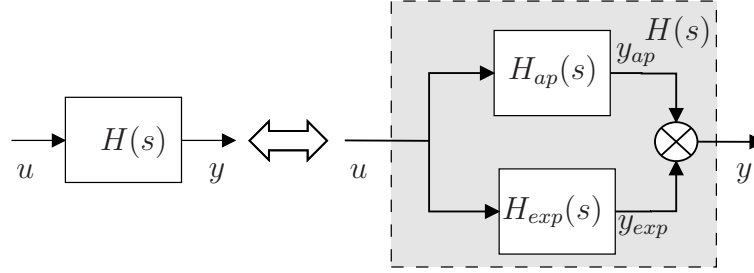


FIGURE 3.3 – Décomposition d'un modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique

3.2.2 – Traitement de la partie apériodique comme une incertitude

Le schéma bloc de la figure 3.3 permet d'écrire le modèle non entier $H(s)$ comme un modèle entier affecté d'une incertitude dynamique additive, comme représenté sur la figure 3.4 où $\gamma_{ap} = \|H_{ap}(s)\|_{H_\infty}$ et où le modèle nominal $H_0(s)$ dépend de γ_{ap} et de $H_{exp}(s)$. Une telle approche est adoptée dans [Hotzel et Fliess, 1998].

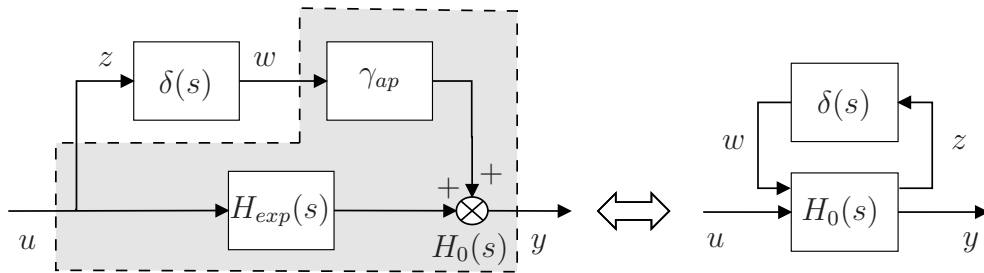


FIGURE 3.4 – Ecriture de $H(s)$ comme un modèle entier affecté d'une incertitude additive

Dans ce cas, l'ensemble de la partie apériodique est traitée comme une incertitude de modèle. L'inconvénient de cette approche est que la partie apériodique peut être prépondérante devant la partie exponentielle. Cette dernière peut même être nulle dans certains cas, comme lorsque aucun s^ν -pôle ne génère de pôle (c.f. section 1.3.5.2.1). C'est

par exemple le cas du transfert suivant :

$$H(s) = \frac{1}{s^{0.2} + 1}. \quad (3.10)$$

$H(s)$ ne génère pas de pôle car pour $\nu = 0.2$ et $\lambda_l = -1$, l'ensemble \mathbb{K}_{λ_l} défini par la relation (1.65) s'écrit

$$\mathbb{K}_{-1} = \{k \in \mathbb{Z} : -0.6 < k < -0.4\} = \emptyset. \quad (3.11)$$

C'est pourquoi nous proposons au paragraphe suivant d'inclure une partie du comportement apériodique dans le modèle nominal.

3.2.3 – Réduction de l'incertitude par inclusion d'une partie du comportement apériodique dans le modèle nominal

Le transfert $H_{ap}(s)$ associé à la partie apériodique est donné par :

$$H_{ap}(s) = \mathcal{L} \left\{ \int_0^{+\infty} \mu(\chi) e^{-t\chi} d\chi \right\} = \int_0^\infty \frac{\mu(\chi)}{s + \chi} d\chi. \quad (3.12)$$

En utilisant le changement de variable $\chi = e^{-z}$ et donc $d\chi = -e^{-z} dz$, la relation (3.12) devient :

$$H_{ap}(s) = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-z} \mu(e^{-z})}{s + e^{-z}} dz, \quad (3.13)$$

qui peut encore s'écrire :

$$H_{ap}(s) = \underbrace{\int_{-\infty}^{z_N} \frac{e^{-z} \mu(e^{-z})}{s + e^{-z}} dz}_{H_{ap}^1(s)} + \underbrace{\int_{z_N}^{z_M} \frac{e^{-z} \mu(e^{-z})}{s + e^{-z}} dz}_{H_{ap}^2(s)} + \underbrace{\int_{z_M}^\infty \frac{e^{-z} \mu(e^{-z})}{s + e^{-z}} dz}_{H_{ap}^3(s)}. \quad (3.14)$$

Les transferts $H_{ap}^1(s)$, $H_{ap}^2(s)$ et $H_{ap}^3(s)$ sont maintenant étudiés indépendamment afin, pour chacun d'entre eux, de déterminer un majorant. Dans le cas de la fonction $H_{ap}^2(s)$, ce majorant se présentera sous la forme d'un transfert entier (rationnel) associé à une erreur dont une majoration sera donnée.

3.2.3.1 – Détermination d'un majorant de H_{ap}^1

Les relations (3.8) et (1.70) permettent d'écrire :

$$\mu(e^{-z}) = \sum_l \sum_q \frac{1}{\pi} \frac{\sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \binom{q}{j} (\lambda_l)^j e^{-z\nu(q-j)} \sin(\nu\pi(q-j))}{(e^{-2z\nu} - 2\lambda_l e^{-z\nu} \cos(\nu\pi) + \lambda_l^2)^q}. \quad (3.15)$$

Lorsque z tend vers $-\infty$, $\mu(e^{-z})$ peut être approximé par le rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur de la relation (3.15) :

$$\mu(e^{-z}) \underset{z \rightarrow -\infty}{\approx} \frac{K_N}{e^{-\tau_N z}} \quad (3.16)$$

où $\tau_N \in \mathbb{R}_+$ est exprimé en fonction de ν , q et $K_N \in \mathbb{R}$. Il existe donc une valeur z_N telle que :

$$|\mu(e^{-z})| \leq M_1 |K_N| e^{\tau_N z}, \quad \forall z \in]-\infty, z_N], \quad (3.17)$$

où M_1 est un réel positif supérieur à 1.

L'expression de $H_{ap}^1(s)$ permet d'écrire l'inégalité suivante :

$$|H_{ap}^1(j\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{z_N} \frac{\mu(e^{-z})}{\frac{j\omega}{e^{-z}} + 1} dz \right| \leq \int_{-\infty}^{z_N} \left| \frac{\mu(e^{-z})}{\frac{j\omega}{e^{-z}} + 1} \right| dz, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (3.18)$$

Or d'après la relation (3.17), on a :

$$\int_{-\infty}^{z_N} \left| \frac{\mu(e^{-z})}{\frac{j\omega}{e^{-z}} + 1} \right| dz \leq M_1 |K_N| \int_{-\infty}^{z_N} \frac{e^{\tau_N z}}{\left| \frac{j\omega}{e^{-z}} + 1 \right|} dz, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (3.19)$$

Ainsi :

$$|H_{ap}^1(j\omega)| \leq M_1 |K_N| \int_{-\infty}^{z_N} \frac{e^{\tau_N z}}{\left| \frac{j\omega}{e^{-z}} + 1 \right|} dz, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (3.20)$$

Sachant que :

$$\frac{1}{\left| \frac{j\omega}{e^{-z}} + 1 \right|} \leq 1, \quad \forall z \in]-\infty, z_N], \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, \quad (3.21)$$

la relation (3.20) devient :

$$|H_{ap}^1(j\omega)| \leq M_1 |K_N| \int_{-\infty}^{z_N} e^{\tau_N z} dz = \underbrace{M_1 |K_N| e^{\tau_N z_N}}_{\overline{H_{ap}^1}}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (3.22)$$

$H_{ap}^1(s)$ peut donc être majorée, en termes de gain, par une constante $\overline{H_{ap}^1}$ dépendant de M_1 , des s^ν -pôles λ_l , de leur multiplicité q et de l'ordre commensurable ν .

3.2.3.2 – Détermination d'un majorant de H_{ap}^3

Lorsque z tend vers $+\infty$, $\mu(e^{-z})$ peut être approximé par le rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur de la relation (3.15) :

$$\mu(e^{-z}) \underset{z \rightarrow +\infty}{\approx} K_M e^{-\tau_M z} \quad (3.23)$$

où $\tau_M \in \mathbb{R}_+$ est fonction de ν , q et $K_M \in \mathbb{R}$. Il existe donc une valeur z_M telle que :

$$|\mu(e^{-z})| \leq M_3 |K_M| e^{-\tau_M z}, \quad z \in [z_M, +\infty[\quad (3.24)$$

où M_3 est un réel positif supérieur à 1.

L'expression de $H_{ap}^3(s)$, associée à la relation (3.24), permettent d'écrire que $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$

$$|H_{ap}^3(j\omega)| = \left| \int_{z_M}^{\infty} \frac{\mu(e^{-z})}{\frac{j\omega}{e^{-z}} + 1} dz \right| \leq \int_{z_M}^{\infty} \left| \frac{\mu(e^{-z})}{\frac{j\omega}{e^{-z}} + 1} \right| dz \leq M_3 |K_M| \int_{z_M}^{\infty} \frac{e^{-\tau_M z}}{\left| \frac{j\omega}{e^{-z}} + 1 \right|} dz. \quad (3.25)$$

Sachant que :

$$\frac{1}{\left| \frac{j\omega}{e^{-z}} + 1 \right|} \leq \frac{1}{\left| \frac{j\omega}{e^{-z_M}} + 1 \right|}, \quad \forall z \in [z_M, +\infty[, \forall \omega \in \mathbb{R}_+, \quad (3.26)$$

la relation (3.25) devient :

$$|H_{ap}^3(j\omega)| \leq \frac{M_3 |K_M|}{\left| \frac{j\omega}{e^{-z_M}} + 1 \right|} \int_{z_M}^{\infty} e^{-\tau_M z} dz = \underbrace{\frac{M_3 |K_M|}{\left| \frac{j\omega}{e^{-z_M}} + 1 \right|} e^{-\tau_M z_M}}_{\left| \overline{H_{ap}^3}(j\omega) \right|}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (3.27)$$

$H_{ap}^3(s)$ peut ainsi être majorée, en termes de gain, par une fonction rationnelle entière $\overline{H_{ap}^3}(s)$.

3.2.3.3 – Détermination d'un majorant de $H_{ap}^2(s)$

$H_{ap}^1(s)$ et $H_{ap}^3(s)$ ont été majorés en prenant la limite de leurs expressions pour z tendant vers $-\infty$ et $+\infty$ respectivement. Une telle procédure n'est pas possible pour $H_{ap}^2(s)$. L'approximation de $H_{ap}^2(s)$ passe par la discrétisation de l'intégrale intervenant dans son expression.

En utilisant la méthode des trapèzes, la fonction de transfert $H_{ap}^2(s)$ admet l'approximation suivante :

$$H_{ap}^2(s) \approx \tilde{H}_{ap}^2(s) = \frac{(z_M - z_N)}{N} \left(\frac{e^{-z_N} \mu(e^{-z_N})}{2(s + e^{-z_N})} + \frac{e^{-z_M} \mu(e^{-z_M})}{2(s + e^{-z_M})} \right) + \frac{(z_M - z_N)}{N} \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{e^{-z_N - k \frac{(z_M - z_N)}{N}} \mu \left(e^{-z_N - k \frac{(z_M - z_N)}{N}} \right)}{\left(s + e^{-z_N - k \frac{(z_M - z_N)}{N}} \right)} \right), \quad (3.28)$$

où N représente le nombre d'intervalles utilisé pour calculer l'intégrale. Plus précisément, on peut écrire :

$$|H_{ap}^2(j\omega)| = |\tilde{H}_{ap}^2(j\omega)| + E_{ap}^2(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (3.29)$$

où l'erreur d'approximation $E_{ap}^2(\omega)$ est telle que :

$$E_{ap}^2(\omega) \leq \overline{E_{ap}^2}(\omega) = \frac{|(z_M - z_N)^3|}{12N^2} \max_{z \in [z_N, \dots, z_M]} \left| \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{e^{-z} \mu(e^{-z})}{j\omega + e^{-z}} \right) \right|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (3.30)$$

Selon le système étudié, la borne $\overline{E_{ap}^2}(\omega)$ de l'erreur peut être grande pour les deux raisons qui suivent.

- N peut être choisi suffisamment petit pour réduire l'ordre de la fonction de transfert obtenue. Cela introduira cependant une erreur plus importante dans le calcul de l'intégrale.
- L'intervalle $[z_M; z_N]$ doit être suffisamment grand pour minimiser $\|H_{ap}^1\|_{H_\infty}$ et $\|H_{ap}^3\|_{H_\infty}$ et donc assurer une bonne précision.

Une telle borne ne permet pas d'assurer une incertitude raisonnable sur l'erreur d'approximation. En se basant sur le calcul de bornes proposé dans [Héleschewitz, 2000], nous proposons d'approximer la fonction

$$F(e^{-z}, s) = \frac{e^{-z}}{s + e^{-z}} \quad (3.31)$$

sur l'intervalle $[z_k; z_{k+1}]$. La transformée de *Laplace* inverse de $F(e^{-z}, s)$ est donnée par :

$$f(e^{-z}, t) = e^{-z} e^{te^{-z}}. \quad (3.32)$$

Une interpolation linéaire de la fonction $f(e^{-z}, t)$ sur l'intervalle $[z_k; z_{k+1}]$ est donnée par :

$$\tilde{f}(e^{-z}, t) = f(e^{-z_k}, t) \left(\frac{z_{k+1} - z}{z_{k+1} + z_k} \right) + f(e^{-z_{k+1}}, t) \left(\frac{z - z_k}{z_{k+1} + z_k} \right). \quad (3.33)$$

La fonction $f(e^{-z}, t)$ peut donc s'écrire [Fortin, 2001] :

$$f(e^{-z}, t) = f(e^{-z_k}, t) \left(\frac{z_{k+1} - z}{z_{k+1} + z_k} \right) + f(e^{-z_{k+1}}, t) \left(\frac{z - z_k}{z_{k+1} + z_k} \right) + e_f(z, t) \quad (3.34)$$

où le terme d'erreur $e_f(z, t)$ est défini par :

$$\begin{aligned} e_f(z, t) &= \frac{1}{2} (z - z_k) (z - z_{k+1}) \left[\frac{d^2 f(e^{-z}, t)}{dz^2} \right]_{z=\xi} \\ &= \frac{1}{2} (z - z_k) (z - z_{k+1}) \left[e^{-z} e^{-te^{-z}} - 3(e^{-z})^2 t e^{-te^{-z}} + (e^{-z})^3 t^2 e^{-te^{-z}} \right]_{z=\xi} \end{aligned} \quad (3.35)$$

avec $\xi \in [z_k, z_{k+1}]$. La transformée de Laplace de la fonction $f(e^{-z}, t)$ peut donc s'écrire :

$$F(e^{-z}, s) = F(e^{-z_k}, s) \left(\frac{z_{k+1} - z}{z_{k+1} + z_k} \right) + F(e^{-z_{k+1}}, s) \left(\frac{z - z_k}{z_{k+1} + z_k} \right) + E_f(z, s) \quad (3.36)$$

avec :

$$E_f(z, s) = \frac{1}{2} (z - z_k) (z - z_{k+1}) \left[\frac{e^{-z} s (s - e^{-z})}{(s + e^{-z})^3} \right]_{z=\xi}, \quad \xi \in [z_k, z_{k+1}]. \quad (3.37)$$

Les relations (3.36) et (3.37) permettent d'écrire $H_{ap_k}^2(s) = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \frac{e^{-z} \mu(e^{-z})}{s + e^{-z}} dz$ sous la forme :

$$H_{ap_k}^2(s) = \tilde{H}_{ap_k}^2(s) + E_{ap_k}^2(s) \quad (3.38)$$

avec :

$$\tilde{H}_{ap_k}^2(s) = \frac{e^{-z_k}}{s + e^{-z_k}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mu(e^{-z}) \left(\frac{z_{k+1} - z}{z_{k+1} + z_k} \right) dz + \frac{e^{-z_{k+1}}}{s + e^{-z_{k+1}}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mu(e^{-z}) \left(\frac{z - z_k}{z_{k+1} + z_k} \right) dz \quad (3.39)$$

où, d'après [Fortin, 2001], l'erreur d'approximation est définie par :

$$E_{ap_k}^2(s) = \frac{1}{2} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \mu(e^{-z}) (z - z_k) (z - z_{k+1}) \left[\frac{e^{-z} s (s - e^{-z})}{(s + e^{-z})^3} \right]_{z=\xi} dz, \quad \xi \in [z_k, z_{k+1}]. \quad (3.40)$$

En appliquant l'inégalité de *Cauchy-Schwartz* au gain du transfert de la relation (3.40), on obtient $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$,

$$\left| E_{ap_k}^2(j\omega) \right| < \frac{1}{2} \sqrt{\int_{z_k}^{z_{k+1}} (\mu(e^{-z}))^2 dz} \sqrt{\int_{z_k}^{z_{k+1}} \left| (z - z_k)(z - z_{k+1}) \left[\frac{e^{-z} j\omega (j\omega - e^{-z})}{(j\omega + e^{-z})^3} \right]_{z=\xi} \right|^2 dz} \quad (3.41)$$

d'où $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$,

$$\left| E_{ap_k}^2(j\omega) \right| < \frac{1}{2} \left[\left\| \mu(e^{-z}) \right\|_{L_2} \right]_{[z_k, z_{k+1}]} \sqrt{\int_{z_k}^{z_{k+1}} \left(\left| (z - z_k)(z - z_{k+1}) \right| \max_{z \in [z_k, z_{k+1}]} \left| \frac{e^{-z} j\omega (j\omega - e^{-z})}{(j\omega + e^{-z})^3} \right| \right)^2 dz}. \quad (3.42)$$

Finalement un majorant de l'erreur d'approximation est obtenu après le calcul de l'intégrale dans la relation (3.42), soit $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$,

$$\left| E_{ap_k}^2(j\omega) \right| < \frac{1}{2} \left[\|\mu(e^{-z})\|_{L_2} \right]_{[z_k, z_{k+1}]} \max_{z \in [z_k, z_{k+1}]} \left| \frac{e^{-z} j\omega (j\omega - e^{-z})}{(j\omega + e^{-z})^3} \right| \sqrt{\frac{1}{30}} \left| (z_{k+1} - z_k)^{\frac{5}{2}} \right|. \quad (3.43)$$

On peut remarquer que la fonction

$$\left| \frac{e^{-z} j\omega (j\omega - e^{-z})}{(j\omega + e^{-z})^3} \right| = \left| \frac{e^{-z} j\omega}{(j\omega + e^{-z})^2} \right| = \frac{\frac{\omega}{e^{-z}}}{\frac{\omega^2}{e^{-2z}} + 1} \quad (3.44)$$

atteint son maximum, égal à $\frac{1}{2}$, à la pulsation $\omega = e^{-z}$.

Le terme $I_{\mu,k} = [\|\mu(e^{-z})\|_{L_2}]_{[z_k, z_{k+1}]}$ peut, quant à lui, être calculé avec une très grande précision car le pas de discrétisation utilisé pour évaluer cette intégrale n'a aucune incidence sur la complexité de l'approximation de $H_{ap_k}^2(s)$. Néanmoins, une erreur d'approximation, notée $E_{\mu,k}$, peut aussi être prise en compte :

$$I_{\mu,k} = \tilde{I}_{\mu,k} + E_{\mu,k}. \quad (3.45)$$

La valeur de l'erreur $E_{\mu,k}$ peut être contrôlée et minimisée autant que nécessaire en choisissant un pas de discrétisation adapté sur l'intervalle $[z_k, z_{k+1}]$.

Il est également à noter qu'une expression analytique de $\tilde{I}_{\mu,k}$ peut être donnée en utilisant un polynôme d'interpolation pour représenter la fonction $\mu(e^{-z})$ sur $[z_k, z_{k+1}]$, une expression analytique de $\mu(e^{-z})$ étant en effet disponible.

L'erreur résultant de l'approximation de la fonction

$$H_{ap}^2(s) = \int_{z_N}^{z_M} \frac{e^{-z} \mu(e^{-z})}{s + e^{-z}} dz \quad (3.46)$$

par la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{ap}^2(s) = & \frac{e^{-z_N}}{s + e^{-z_N}} \int_{z_N}^{z_N+h} \mu(e^{-z}) \left(\frac{z_{k+1} - z}{z_{k+1} - z_k} \right) dz + \frac{e^{-z_N+Nh}}{s + e^{-z_N+Nh}} \int_{z_N+(N-1)h}^{z_N+Nh} \mu(e^{-z}) \left(\frac{z - z_k}{z_{k+1} - z_k} \right) dz \\ & \sum_{k=1}^{N-1} \frac{e^{-z_N-kh}}{s + e^{-z_N-kh}} \left(\int_{z_N+(k-1)h}^{z_N+kh} \mu(e^{-z}) \left(\frac{z - z_N - (k-1)h}{h} \right) dz + \right. \\ & \left. \int_{z_N+kh}^{z_N+(k+1)h} \mu(e^{-z}) \left(\frac{z_N + (k+1)h - z}{h} \right) dz \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

est majorée par :

$$\sum_{k=1}^N \left| E_{ap_k}^2(j\omega) \right| < \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left[\left\| \mu(e^{-z}) \right\|_{L_2} \right]_{[z_N+kh, z_N+(k+1)h]} \max_{z \in [z_N+kh, z_N+(k+1)h]} \left| \frac{e^{-z} j\omega (j\omega - e^{-z})}{(j\omega + e^{-z})^3} \right| \sqrt{\frac{1}{30}} h^{\frac{5}{2}} = \overline{E_{ap}^2}(\omega), \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (3.48)$$

Soit après simplification :

$$\overline{E_{ap}^2}(\omega) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{30}} h^{\frac{5}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\tilde{I}_{\mu,k} + E_{\mu,k} \right) \max_{z \in [z_N+kh, z_N+(k+1)h]} \left| \frac{\frac{\omega}{e^{-z}}}{\left(\frac{\omega^2}{e^{-2z}} + 1 \right)} \right|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (3.49)$$

avec :

$$h = \frac{z_M - z_N}{N}. \quad (3.50)$$

Pour résumer, le transfert $H_{ap}^2(s)$ peut être approximé par une fonction rationnelle entière $\tilde{H}_{ap}^2(s)$. L'écart, en termes de gain, entre $H_{ap}^2(s)$ et son approximation $\tilde{H}_{ap}^2(s)$ peut être majoré par $\overline{E_{ap}^2}(\omega)$.

3.2.3.4 – Définition du modèle entier incertain

Les développements précédents permettent de déterminer un majorant $\overline{H_{ap}}(s)$ de la partie apériodique $H_{ap}(s)$ tel que :

$$|H_{ap}(j\omega)| \leq |\overline{H_{ap}}(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (3.51)$$

Le gain de ce majorant est donné par :

$$|\overline{H_{ap}}(j\omega)| = \left| \tilde{H}_{ap}^2(j\omega) \right| + \overline{E_{ap}}(\omega) \quad (3.52)$$

où le majorant de l'erreur d'approximation $\overline{E_{ap}}(\omega)$ de la partie apériodique est obtenu en considérant $\overline{H_{ap}^1}$ et $\left| \overline{H_{ap}^3}(j\omega) \right|$ comme des termes d'erreur en basses et hautes fréquences respectivement, soit :

$$\overline{E_{ap}}(\omega) = \overline{E_{ap}^2}(\omega) + \overline{H_{ap}^1} + \left| \overline{H_{ap}^3}(j\omega) \right|. \quad (3.53)$$

$\overline{H_{ap}^1}$ est une constante donnée par (3.22), $\tilde{H}_{ap}^2(s)$ et $\overline{H_{ap}^3}(s)$ sont des transferts entiers respectivement donnés par (3.27) et (3.29) et $\overline{E_{ap}^2}(\omega)$ est une fonction de ω donnée par (3.49).

Ayant défini un majorant de la partie apériodique, l'ensemble du modèle non entier (constitué d'une partie apériodique mais aussi d'une partie exponentielle) peut être majoré par le transfert $\overline{H}(s)$ tel que :

$$|H(j\omega)| \leq |\overline{H}(j\omega)|, \quad \forall \omega. \quad (3.54)$$

Le gain de ce transfert est donné par :

$$|\overline{H}(j\omega)| = |H_0(j\omega)| + \overline{E_{ap}}(\omega) \quad (3.55)$$

où $|H_0(j\omega)|$ est le gain du transfert entier :

$$H_0(s) = H_{exp}(s) + \tilde{H}_{ap}^2(s). \quad (3.56)$$

$H_0(s)$ est une fonction de transfert entière puisqu'elle est la somme de transferts entiers. Le modèle non entier est ainsi majoré, en termes de gain, par un modèle entier $H_0(s)$ interconnecté avec une erreur dynamique $\overline{E_{ap}}(\omega)$ non rationnelle.

Plusieurs approches sont possibles pour écrire le majorant $\overline{H}(s)$ comme un modèle entier incertain. L'une d'entre elles consiste à écrire la partie apériodique $H_{ap}(s)$ comme un modèle incertain $H_{ap}^i(s)$ en traitant l'erreur dynamique $\overline{E_{ap}}(\omega)$ comme une incertitude multiplicative affectant $\tilde{H}_{ap}^2(s)$ considéré comme le modèle nominal de la partie apériodique. Soit $W_{ap}(s)$ un filtre entier modélisant l'erreur relative $E_{ap}^r(\omega)$ entre $H_{ap}(s)$ et son approximation entière $\tilde{H}_{ap}^2(s)$. Cette erreur relative peut s'écrire :

$$E_{ap}^r(\omega) = \frac{\overline{E_{ap}}(\omega)}{|\tilde{H}_{ap}^2(j\omega)|} - 1, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (3.57)$$

$E_{ap}^r(\omega)$ n'étant pas une fonction rationnelle entière, un filtre $W_{ap}(s)$ vérifiant :

$$|E_{ap}^r(\omega)| \leq |W_{ap}(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (3.58)$$

est introduit.

La relation précédente permet de redéfinir la partie apériodique $H_{ap}(s)$ comme le modèle entier incertain

$$H_{ap}^i(s) = \tilde{H}_{ap}^2(s) (1 + W_{ap}(s)\delta(s)), \quad (3.59)$$

représenté sur la figure 3.5 où $\delta(s)$ est une incertitude dynamique normalisée telle que $\|\delta(s)\|_{H_\infty} < 1$.

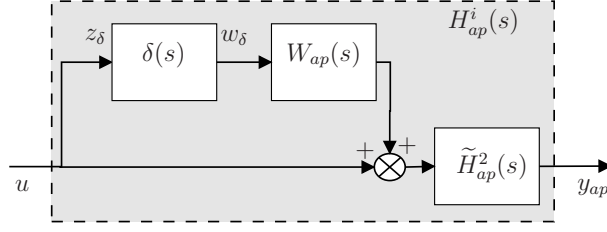


FIGURE 3.5 – Représentation de $H_{ap}(s)$ comme un modèle entier $\tilde{H}_{ap}^2(s)$ affecté par une incertitude multiplicative $\delta(s)$

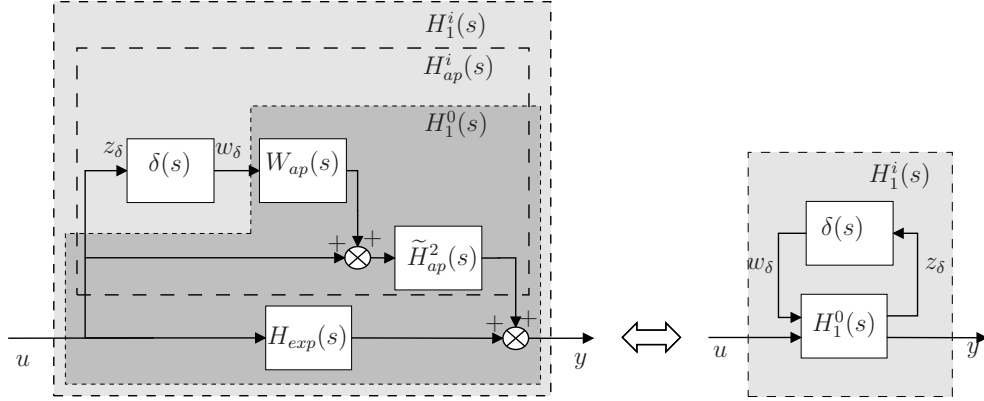


FIGURE 3.6 – Représentation de $H(s)$ comme un modèle entier incertain en réécrivant $H_{ap}(s)$ comme un modèle incertain

Finalement, $H(s)$ peut s'écrire comme le modèle entier incertain $H_1^i(s)$ représenté sur la figure 3.6, où le modèle entier nominal $H_1^0(s)$ dépend de $H_{exp}(s)$, de $\tilde{H}_{ap}^2(s)$ et de $W_{ap}(s)$.

Une autre approche consiste à entièrement réécrire $H(s)$ comme le modèle entier $H_0(s)$ défini par la relation (3.56), affecté par une incertitude multiplicative. L'erreur relative $E^r(s)$ entre le modèle non entier $H(s)$ et le modèle entier $H_0(s)$ s'écrit alors :

$$E^r(s) = \frac{H(s)}{H_0(s)} - 1. \quad (3.60)$$

$E^r(s)$ n'étant pas un transfert entier, on introduit comme précédemment un filtre $W_m(s)$ vérifiant :

$$|E^r(j\omega)| \leq |W_m(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (3.61)$$

et permettant de redéfinir $H(s)$ comme le modèle entier incertain

$$H_m^i(s) = H_0(s) (1 + W_m(s)\delta(s)) \quad (3.62)$$

représenté sur la figure 3.7.

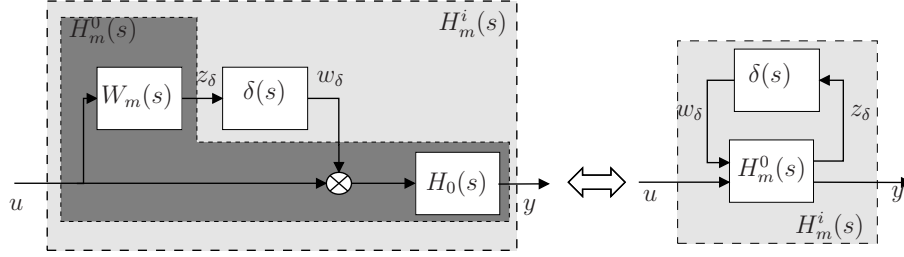


FIGURE 3.7 – Représentation de $H(s)$ comme un modèle entier $H_m^0(s)$ affecté par une incertitude multiplicative

Afin d'illustrer la méthodologie présentée dans les paragraphes précédents, cette dernière est à présent appliquée à un exemple académique.

3.2.3.5 – Exemple

Considérons le modèle non entier commensurable d'ordre ν décrit par la fonction de transfert :

$$H(s) = \frac{K \left(\frac{s^\nu}{z_1} + 1 \right)}{\left(\frac{s^\nu}{\lambda_1} + 1 \right) \left(\frac{s^\nu}{\lambda_2} + 1 \right) \left(\frac{s^\nu}{\lambda_3} + 1 \right)} \quad (3.63)$$

où $\nu = 0.5$, $z_1 = 2$, $\lambda_1 = -0.1 + 0.2j$, $\lambda_2 = -0.1 - 0.2j$ et $\lambda_3 = 100$.

La décomposition en éléments simples de $H(s)$ permet d'écrire :

$$H(s) = \frac{k_1}{\left(\frac{s^\nu}{\lambda_1} + 1 \right)} + \frac{k_2}{\left(\frac{s^\nu}{\lambda_2} + 1 \right)} + \frac{k_3}{\left(\frac{s^\nu}{\lambda_3} + 1 \right)} \quad (3.64)$$

avec :

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{-K \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_1 - z_1)}{z_1 (-\lambda_2 + \lambda_1) (-\lambda_3 + \lambda_1)}; \\ k_2 &= \frac{K \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_2 - z_1)}{z_1 (-\lambda_2 + \lambda_1) (-\lambda_3 + \lambda_2)}; \\ k_3 &= \frac{-K \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_3 - z_1)}{z_1 (-\lambda_3 + \lambda_1) (-\lambda_3 + \lambda_2)}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

D'après les relations (1.65) et (1.66), les s^ν -pôles $-\lambda_1$ et $-\lambda_2$ génèrent deux pôles $p_1 = -0.03 + 0.04j$ et $p_2 = -0.03 - 0.04j$.

Les relations (3.9), (3.64) et (3.65) permettent de déterminer la partie exponentielle

de $H(s)$:

$$H_{exp}(s) = \frac{k_1}{\lambda_1 \nu \left(\frac{s}{p_1} - 1 \right)} + \frac{k_2}{\lambda_2 \nu \left(\frac{s}{p_2} - 1 \right)}. \quad (3.66)$$

La partie apériodique de $H(s)$ vaut, quant à elle :

$$H_{ap}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(e^{-z})}{e^{-z} + 1} dz \quad (3.67)$$

où la fonction $\mu(e^{-z})$, représentée sur la figure 3.8, est définie par :

$$\mu(e^{-z}) = \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{k_i e^{-\nu z}}{e^{-2\nu z} - 2\lambda_i e^{-\nu z} \cos(\nu\pi) + \lambda_i^2}. \quad (3.68)$$

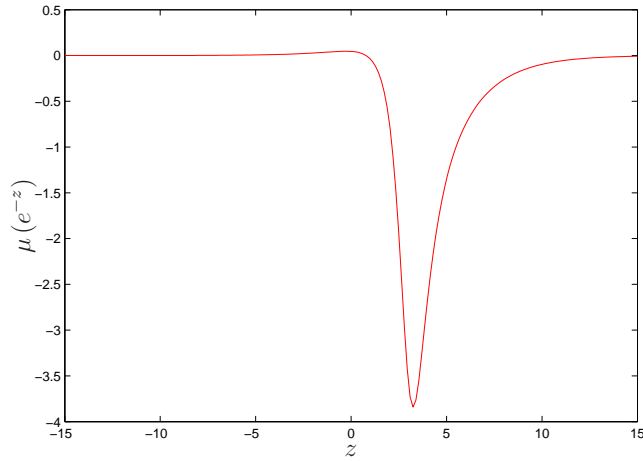


FIGURE 3.8 – Représentation de la fonction $\mu(e^{-z})$

Le tracé de la figure 3.9.a, représentant $|\mu(e^{-z})|$ et son approximation lorsque z tend vers $-\infty$, permet de vérifier que :

$$|\mu(e^{-z})| \leq |K_N| e^{\tau_N z}, \quad z \in]-\infty, z_N] \quad (3.69)$$

avec

$$K_N = \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} (k_1 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2) + k_2 (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) + k_3 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)), \quad \tau_N = 3\nu, \quad z_N = -8. \quad (3.70)$$

De même, la figure 3.9.b permet de vérifier que :

$$|\mu(e^{-z})| \leq M |K_M| e^{-\tau_M z}, \quad z \in [z_M, +\infty[\quad (3.71)$$

avec

$$K_M = \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \left(\frac{k_1}{\lambda_1^2} + \frac{k_2}{\lambda_2^2} + \frac{k_3}{\lambda_3^2} \right), \quad \tau_M = \nu, \quad z_M = 9, \quad M = 1.2 \quad (3.72)$$

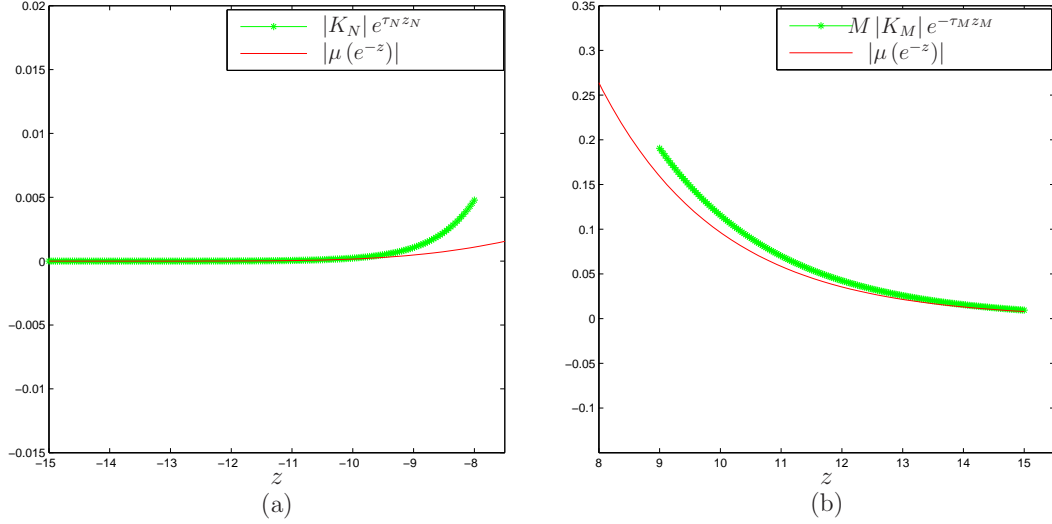


FIGURE 3.9 – Majorants de $|\mu(e^{-z})|$, (a) lorsque $z \in]-\infty, z_N]$, (b) lorsque $z \in [z_M, +\infty[$

Les majorants de $|\mu(e^{-z})|$ précédents permettent de déterminer $\overline{H_{ap}^1}$ et $\overline{H_{ap}^3}(s)$ qui majorent respectivement H_{ap}^1 et H_{ap}^3 en termes de gain. Ceci est confirmé par la figure 3.10 représentant ces différents transferts. Il est par ailleurs à noter, comme expliqué précédemment, que $\overline{H_{ap}^1}$ est une constante et que $\overline{H_{ap}^3}(s)$ est un transfert entier.

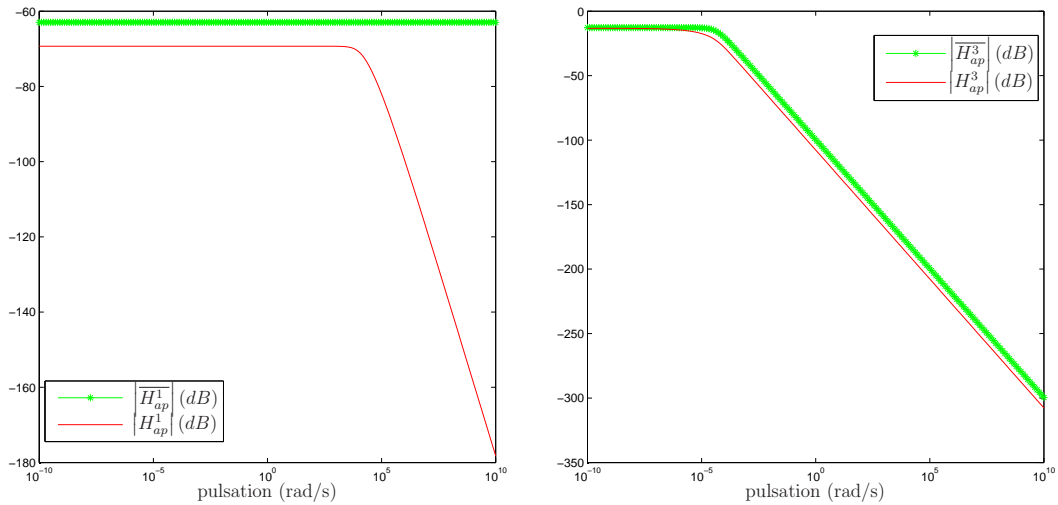


FIGURE 3.10 – Majorants de $|H_{ap}^1|$ et $|H_{ap}^3|$

La fonction $\tilde{H}_{ap}^2(s)$ et l'erreur d'approximation $\overline{E}_{ap}^2(\omega)$ sont ensuite calculées en découplant l'intervalle $[z_N, z_M]$ ($z_N = -8$ et $z_M = 9$) en $N = 15$ morceaux et en utilisant les relations (3.47) et (3.49) respectivement. La fonction $\tilde{H}_{ap}^2(s)$ ainsi obtenue ayant 48 pôles, un plus petit nombre N de cellules sera utilisé pour la synthèse afin d'éviter d'obtenir des correcteurs d'ordre trop élevés.

Une fois $\overline{H}_{ap}^1(s)$, $\tilde{H}_{ap}^2(s)$, $\overline{H}_{ap}^3(s)$ et $\overline{E}_{ap}(\omega)$ calculés, le transfert $\overline{H}_{ap}(s)$ est déterminé en utilisant la relation (3.52). Sur la figure 3.11 sont représentés :

- l'erreur dynamique $\overline{E}_{ap}(\omega)$;
- le gain de la partie aperiodique $H_{ap}(s)$ obtenu en calculant la différence entre le modèle non entier $H(s)$ et la partie exponentielle $H_{exp}(s)$;
- le gain de l'approximation de la partie aperiodique $\tilde{H}_{ap}^2(s)$ calculée par la méthode d'intégration des trapèzes ;
- le gain du majorant de la partie aperiodique $\overline{H}_{ap}(s)$.

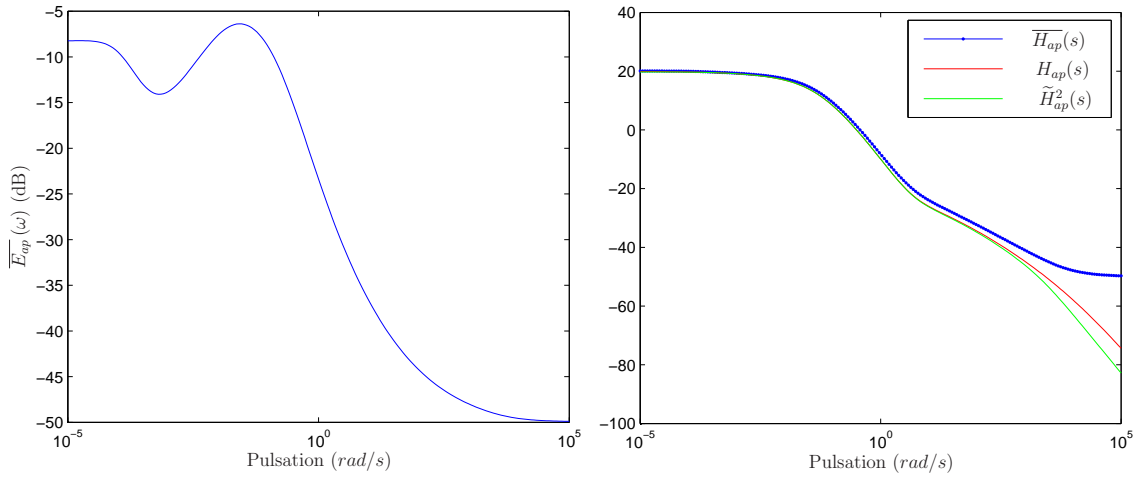


FIGURE 3.11 – Erreur $\overline{E}_{ap}(\omega)$ et approximation de $H_{ap}(s)$

Afin de déterminer le modèle entier incertain associé à $H(s)$, l'erreur relative et le filtre $W_m(s)$ donnés respectivement par les relation (3.60) et (3.61) sont représentés sur la figure 3.12.

Le modèle incertain $H_m^i(s)$ peut maintenant être déterminé en utilisant la relation (3.62). La figure 3.13 fait apparaître les gains de la réponse fréquentielle du modèle non entier $H(s)$ et du modèle nominal $H_0(s)$ ainsi que ceux du modèle entier incertain $H_m^i(s)$ pour un tirage aléatoire d'éléments incertains $\delta(s)$ vérifiant $\|\delta(s)\|_{H_\infty} < 1$.

Cette figure permet de vérifier que la réponse fréquentielle du modèle non entier $H(s)$ est bien contenue dans le faisceau de réponses fréquentielles du modèle entier incertain

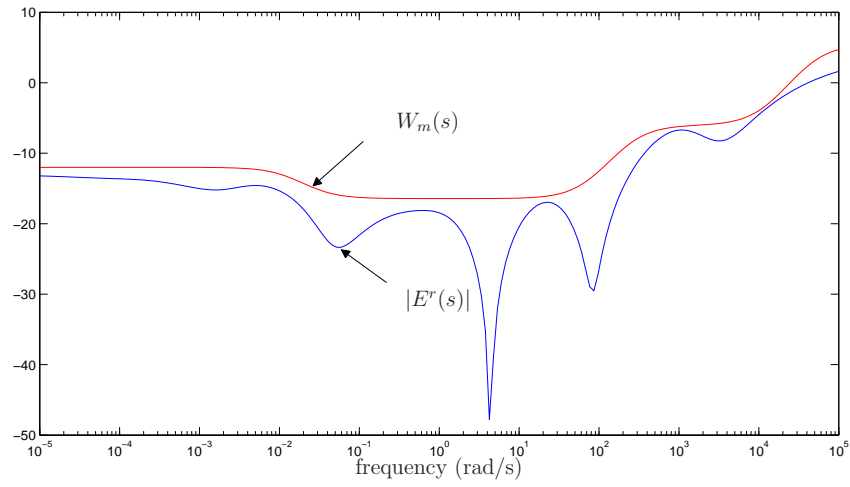


FIGURE 3.12 – Erreur relative $E^r(s)$ et gain du filtre $W_m(s)$

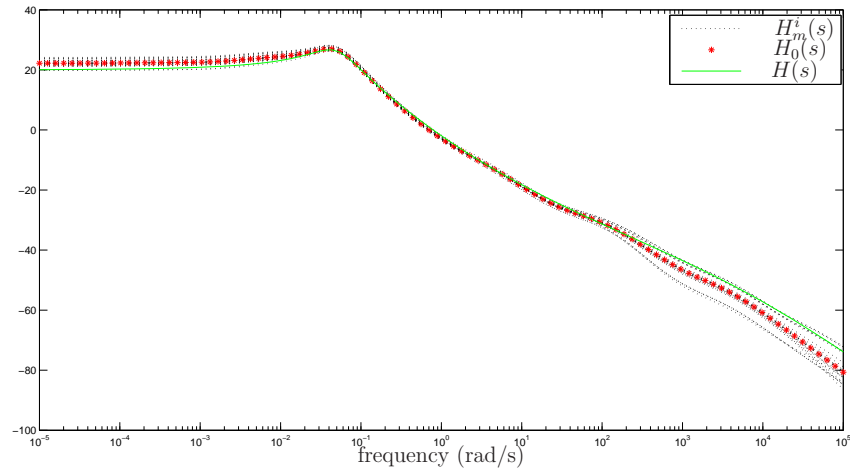


FIGURE 3.13 – Comparaison des gains du modèle non entier $H(s)$, du modèle nominal $H_0(s)$ et du modèle entier incertain $H_m^i(s)$

$H_m^i(s)$. Ce modèle entier incertain sera utilisé pour la synthèse de lois de commande H_∞ dans la partie suivante.

3.3 – Commande H_∞ d'un modèle non entier représenté à partir de sa partie exponentielle et de sa partie apériodique

Dans les paragraphes précédents, nous avons développé une méthodologie permettant de reformuler un modèle non entier comme un modèle entier affecté d'une incertitude. Cette méthodologie, basée sur la décomposition en une partie exponentielle et une partie apériodique d'un modèle non entier, a conduit à l'obtention de deux modèles incertains $H_1^i(s)$ et $H_m^i(s)$, respectivement représentés sur les figures 3.6 et 3.7.

Ces modèles incertains sont mis à profit, dans le paragraphe suivant, pour évaluer la stabilité et les performances du modèle non entier. Dans un second paragraphe, nous étudierons comment synthétiser des lois de commande H_∞ permettant de garantir un certain niveau de performances vis-à-vis du modèle non entier initial.

3.3.1 – Analyse en stabilité et en performances

Les deux modèles incertains $H_1^i(s)$ et $H_m^i(s)$ peuvent s'écrire sous la forme d'une interconnexion telle que celle de la figure 3.14 où le modèle nominal $H_\delta^0(s)$ correspond, selon le cas, à $H_1^0(s)$ ou $H_m^0(s)$.

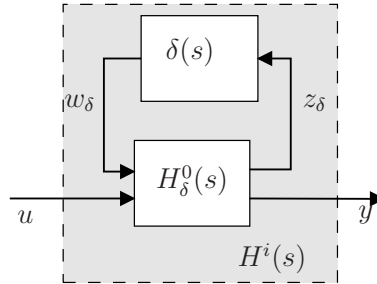


FIGURE 3.14 – Formulation d'un modèle non entier $H(s)$ comme un modèle entier incertain $H^i(s)$

Une approche naturelle pour étudier la stabilité et les performances du modèle non entier est ainsi d'effectuer une analyse de stabilité et de performances robustes du modèle entier $H_0(s)$ interconnecté avec un élément incertain $\delta(s)$ tel que $\|\delta(s)\|_{H_\infty} < 1$. L'étude du transfert $T_{yu}(s) = F_u(H_\delta^0(s), \delta(s))$ permet ainsi de garantir un niveau de performances vis-à-vis du modèle de départ. De même, si le modèle entier incertain est robustement

stable, alors le modèle non entier initial l'est aussi. Dans le cas contraire, il n'est pas possible de conclure quant à l'instabilité du modèle non entier.

Cet inconvénient peut néanmoins être levé en analyse. En effet, l'obtention du modèle incertain $H^i(s)$ est basée sur l'interconnexion de la partie exponentielle et de la partie apériodique du modèle non entier. Or, comme nous le rappelons dans ce qui suit, la partie apériodique est nécessairement stable et la seule partie exponentielle permet de conclure sur la stabilité du modèle non entier sans pessimisme.

D'après les résultats du paragraphe 1.3.5.1 sur la décomposition modale d'un modèle non entier, la partie exponentielle $h_{exp}(t)$ s'exprime comme une combinaison linéaire d'éléments, appelés modes propres, de réponses impulsionnelles données par la relation (1.67), soit :

$$h_{exp}^{\lambda_l, q}(t) = \sum_{j=1}^{n_{\mathbb{K}\lambda_l}} \frac{p_j^{\lambda_l}}{\lambda_l^q} Q_{q-1} \left(\frac{1}{\nu}, t p_j^{\lambda_l} \right) e^{t p_j^{\lambda_l}}. \quad (3.73)$$

De même, la partie apériodique s'écrit comme la somme de termes modaux définis par la relation (1.69), soit :

$$h_{ap}^{\lambda_l}(t) = \int_0^{+\infty} \mu^{\lambda_l, q}(\chi) e^{-t\chi} d\chi. \quad (3.74)$$

Etant donné le comportement asymptotique de la fonction $e^{-t\chi}$ lorsque t tend vers $+\infty$, il est assez aisé de conclure que tous les modes apériodiques sont stables. Il en va donc de même pour la partie apériodique.

L'étude de la stabilité de modèles non entiers décrits par une décomposition en partie exponentielle et partie apériodique se résume donc à l'étude de la stabilité des modes propres de la partie exponentielle. Ces modes propres correspondent aux pôles $p_j^{\lambda_l}$ de l'équation (3.73). Si l'ensemble des pôles est à partie réelle négative, alors la partie exponentielle est stable. Il en va alors de même pour le modèle non entier.

3.3.2 – Commande H_∞

Le modèle entier incertain $H^i(s)$ de la figure 3.14 est à présent utilisé pour la synthèse de lois de commande H_∞ selon la méthodologie présentée dans le chapitre 2. Ce modèle est alors mis sous la forme standard de la figure 3.15 où $H_{aug}^0(s)$ contient le modèle nominal $H_\delta^0(s)$ augmenté de fonctions de pondérations. Ces fonctions de pondérations jouent le rôle de gabarits fréquentiels imposés à différents transferts du système bouclé.

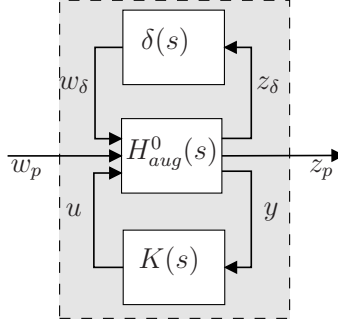


FIGURE 3.15 – Problème standard de synthèse H_∞

Le transfert $T_{z_p w_p}(s)$ entre les entrées et sorties de performances w_p et z_p permet alors de vérifier si les contraintes fréquentielles sont satisfaites. Le problème de synthèse consiste donc à déterminer une loi de commande K stabilisante telle que :

$$\|T_{z_p w_p}(K, \delta, s)\|_\infty < 1, \quad \forall \delta(s) \text{ t.q. } \|\delta(s)\|_{H_\infty} < 1. \quad (3.75)$$

La contrainte précédente peut être prise en compte en introduisant un bloc incertain fictif $\Delta_p(s)$ selon le schéma de la figure 3.16.

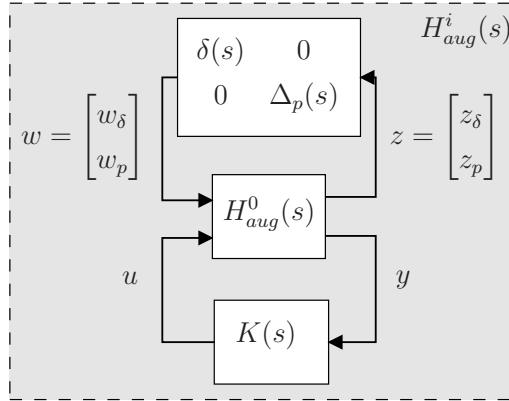


FIGURE 3.16 – Problème de synthèse H_∞ faisant intervenir le bloc incertain fictif $\Delta_p(s)$

Le problème H_∞ consiste alors à déterminer un correcteur $K(s)$ vérifiant :

$$\|F_l(H_{aug}^0, K(s))\|_\infty < 1. \quad (3.76)$$

Si la relation (3.76) est satisfaite, le modèle entier incertain vérifie les contraintes fréquentielles et donc le modèle non entier également. Dans le cas contraire, il n'est pas possible de conclure et les contraintes doivent être relâchées.

Le choix des fonctions de pondération ainsi que l'obtention du modèle augmenté $H_{aug}^0(s)$ peut être réalisé selon la méthodologie classique du H_∞ [Duc et Font, 1999].

Ceci n'est donc pas traité ici dans le cas général mais illustré dans l'exemple de la partie suivante.

3.4 – Application

Soit le modèle non entier commensurable d'ordre $\nu = 0.5$ étudié dans la partie précédente et dont la fonction de transfert est rappelée ci-dessous :

$$H(s) = \frac{K \left(\frac{s^\nu}{z_1} + 1 \right)}{\left(\frac{s^\nu}{\lambda_3} + 1 \right) \left(\frac{s^\nu}{\lambda_2} + 1 \right) \left(\frac{s^\nu}{\lambda_3} + 1 \right)} \quad (3.77)$$

où $\nu = 0.5$, $z_1 = 2$, $\lambda_1 = -0.1 + 0.2j$, $\lambda_2 = -0.1 - 0.2j$ et $\lambda_3 = 100$.

La décomposition du modèle (3.77) en partie exponentielle et partie apériodique a été effectuée au paragraphe 3.2.3.5 et $H(s)$ a été approximé par le modèle entier incertain $H^i(s)$ décrit par la relation (3.62). Conformément aux spécifications du paragraphe 3.3.2, le modèle incertain $H^i(s)$ est maintenant utilisé pour calculer un correcteur dynamique $K(s)$ asservissant le modèle non entier $H(s)$ tout en vérifiant des contraintes de performances.

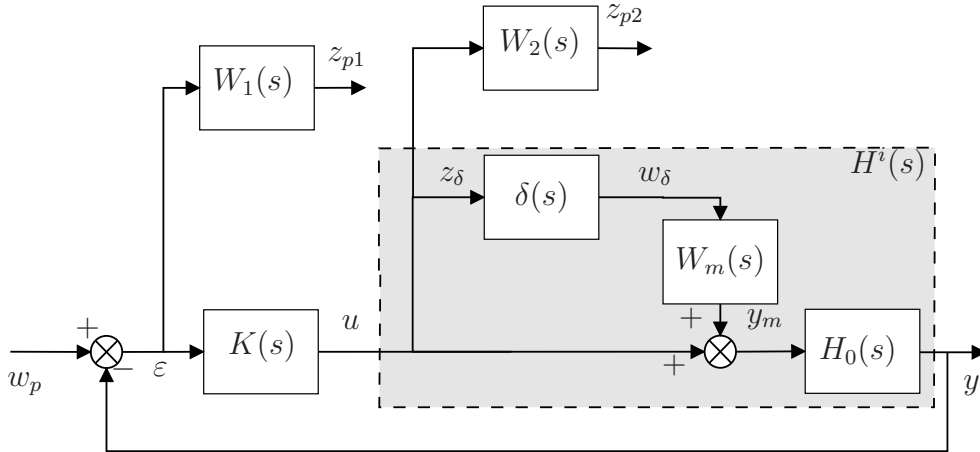


FIGURE 3.17 – Asservissement du modèle entier incertain $H^i(s)$

Le schéma bloc du système asservi est représenté sur la figure 3.17. Les performances du système asservi sont mesurées à l'aide de la fonction de sensibilité de l'entrée $S_i(s)$ entre w_p et l'erreur ε :

$$T_{\varepsilon w_p}(s) = S_i(s) = \frac{1}{1 + K(s)H^i(s)}, \quad (3.78)$$

et de la fonction de sensibilité de la commande $KS_i(s)$ entre la référence w_p et la commande u :

$$T_{uw_p}(s) = KS_i(s) = K(s)S_i(s). \quad (3.79)$$

Afin d'imposer des contraintes sur ces transferts, des fonctions de pondération $W_1(s)$ et $W_2(s)$ sont introduites. Plus précisément, $W_1^{-1}(s)$ et $W_2^{-1}(s)$ jouent le rôle de gabarits fréquentiels sur les transferts $S_i(s)$ et $KS_i(s)$ respectivement :

$$\begin{cases} |S_i(j\omega)| < |W_1^{-1}(j\omega)| \\ |KS_i(j\omega)| < |W_2^{-1}(j\omega)| \end{cases}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, \quad \forall \delta(s) \text{ t.q. } \|\delta(s)\|_{H_\infty} < 1. \quad (3.80)$$

Les contraintes (3.80) sont satisfaites s'il existe $K(s)$ tel que :

$$\left\| \begin{array}{c} W_1(s)S_i(s) \\ W_2(s)KS_i(s) \end{array} \right\|_\infty < 1, \quad (3.81)$$

c'est-à-dire s'il existe $K(s)$ tel que :

$$\|F_l(H_{aug}^0, K(s))\|_\infty < 1. \quad (3.82)$$

En effet, si la contrainte (3.81) est satisfaite, alors les contraintes suivantes le sont également :

$$\begin{cases} \|W_1(s)S(s)\|_{H_\infty} < 1 \\ \|W_2(s)KS(s)\|_{H_\infty} < 1 \end{cases}. \quad (3.83)$$

Les contraintes précédentes sont équivalentes à :

$$\begin{cases} \|S(s)\|_{H_\infty} < \|W_1^{-1}(s)\|_{H_\infty} \\ \|KS(s)\|_{H_\infty} < \|W_2^{-1}(s)\|_{H_\infty} \end{cases}. \quad (3.84)$$

et donc à (3.80).

Il faut noter que le filtre $W_m(s)$ modélisant l'erreur relative peut également être perçu comme une contrainte sur le transfert $KS_i(s)$. Le filtre $W_2(s)$ n'a donc une utilité que s'il est plus contraignant, en termes de gain, que $W_m(s)$ (et a minima sur une bande de fréquences). Pour cette application académique, les fonctions de pondération $W_1(s)$ et $W_2(s)$ sont choisies comme suit :

$$W_1(s) = \frac{0.01(s + 0.1)}{s + 10^{-5}}, \quad (3.85)$$

$$W_2(s) = \frac{7.1 \cdot 10^4(s + 0.1)}{s + 10^4}. \quad (3.86)$$

Le choix des pondérations pour remplir des contraintes de performances (rapidité, précision, rejet de perturbations...) sera discuté dans le chapitre 5.

Afin de synthétiser le correcteur $K(s)$, il convient de déterminer le modèle augmenté $H_{aug}^0(s)$ prenant en compte le modèle nominal $H_0(s)$, les contraintes de performances $W_1(s)$ et $W_2(s)$ ainsi que le filtre $W_m(s)$ utilisé dans l'écriture de l'incertitude multiplicative. Les représentations d'état associées à ces différents transferts sont définies comme suit :

$$H_0 \quad \begin{cases} x_0(t) &= A_0 x_0(t) + B_0 u(t) \\ y(t) &= C_0 x_0(t) + D_0 u(t) \end{cases}, \quad (3.87)$$

$$W_m \quad \begin{cases} \eta_m(t) &= A_m \eta_m(t) + B_m w_\delta(t) \\ y_m(t) &= C_m \eta_m(t) + D_m w_\delta(t) \end{cases}, \quad (3.88)$$

$$W_1 \quad \begin{cases} \eta_1(t) &= A_1 \eta_1(t) + B_1 \varepsilon(t) \\ z_{p1}(t) &= C_1 \eta_1(t) + D_1 \varepsilon(t) \end{cases} \quad (3.89)$$

et

$$W_2 \quad \begin{cases} \eta_2(t) &= A_2 \eta_2(t) + B_2 u(t) \\ z_{p2}(t) &= C_2 \eta_2(t) + D_2 u(t) \end{cases}. \quad (3.90)$$

Le modèle augmenté est alors défini par la représentation d'état :

$$H_{aug}^0 \quad \begin{cases} x(t) &= A x(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yu} u(t) + D_{yw} w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t) \end{cases} \quad (3.91)$$

où $w = [w_\delta \quad w_p^T]^T$ et :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_0 & 0 & B_0 C_m & 0 \\ -B_1 C_0 & A_1 & 0 & -B_1 D_0 C_m \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_m \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 & B_0 D_m \\ B_1 & -B_1 D_0 D_m \\ 0 & 0 \\ 0 & B_m \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} B_0 \\ -B_1 D_0 \\ B_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_z &= \begin{bmatrix} -D_1 C_0 & C_1 & 0 & -D_1 D_0 C_m \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zw} = \begin{bmatrix} D_1 & -D_1 D_0 D_m \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} -D_1 D_0 \\ D_2 \\ I \end{bmatrix} \\ C_y &= [C_0 \quad 0 \quad D_0 C_m], \quad D_{yw} = [0 \quad D_0 D_m] \quad \text{et} \quad D_{yu} = -D_0. \end{aligned} \quad (3.92)$$

La boîte à outils « Robust Control » du logiciel MATLAB est utilisée pour résoudre le problème standard H_∞ , c'est-à-dire déterminer un correcteur stabilisant $K(s)$ tel que

$\|F_l(H_{aug}^0, K(s))\|_\infty < 1$. Les figures 3.18 et 3.19 représentent respectivement les fonctions de sensibilité $S(s)$ et $KS(s)$ associées au modèle nominal, au modèle incertain et au modèle non entier, ainsi que les gabarits fréquentiels associés.

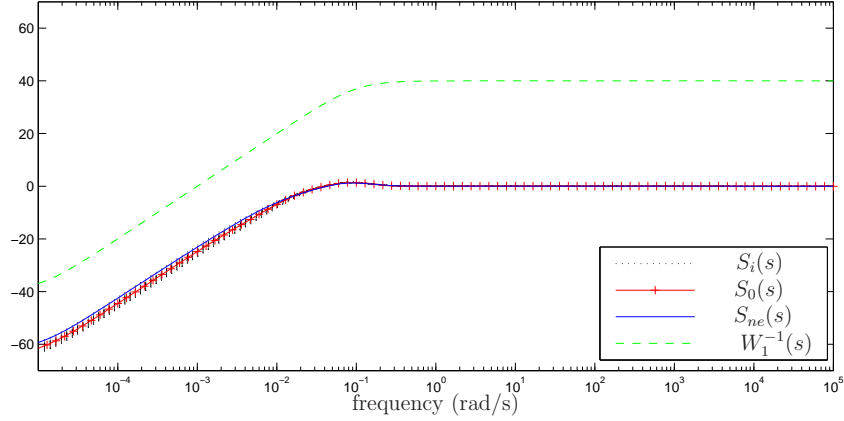


FIGURE 3.18 – Comparaison du filtre $W_1^{-1}(s)$ aux fonctions de sensibilité de l'entrée du modèle nominal notée $S_0(s)$, du modèle non entier notée $S_{ne}(s)$ et du modèle entier incertain $S_i(s)$

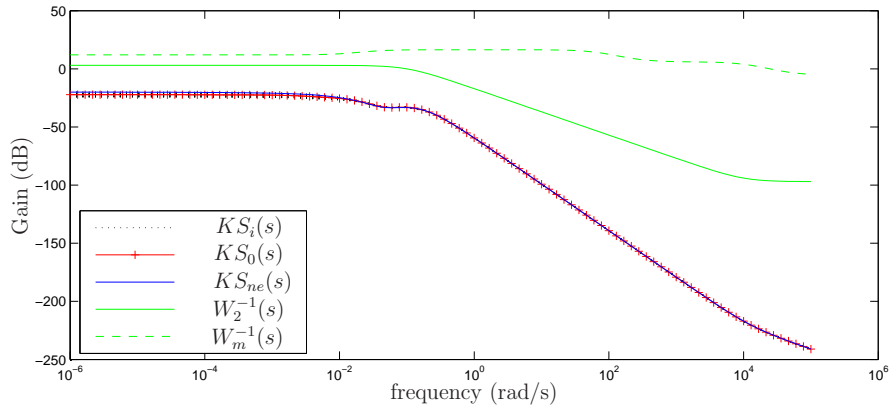


FIGURE 3.19 – Comparaison du filtre $W_2^{-1}(s)$ aux fonctions de sensibilité de la commande du modèle nominal notée $KS_0(s)$, du modèle non entier notée $KS_{ne}(s)$ et du modèle entier incertain $KS_i(s)$

La contrainte $\|F_l(H_0^{aug}, K(s))\|_\infty < 1$ ayant été respectée lors de la synthèse du correcteur, il est donc naturel de constater que les fonctions de sensibilité $S(s)$ et $KS(s)$ respectent les gabarits fréquentiels imposés, aussi bien pour le modèle nominal que pour le modèle entier incertain. Le modèle non entier étant une réalisation possible du modèle

entier incertain, il vérifie donc également ces mêmes contraintes de performances. En outre, l'étude des pôles de la fonction de transfert du modèle non entier $H(s)$ bouclé par le correcteur entier $K(s)$ confirme sa stabilité.

Les réponses temporelles du modèle non entier initial $H(s)$ et du modèle bouclé $H_{bf}(s)$ (transfert entre w_p et y) à un échelon unitaire sont représentées sur la figure 3.20. On constate que le modèle bouclé est plus stable (pas de dépassement) et plus rapide car son temps de réponse à 5% est d'environ 240 s contre plus de 2000 s pour le procédé $H(s)$.

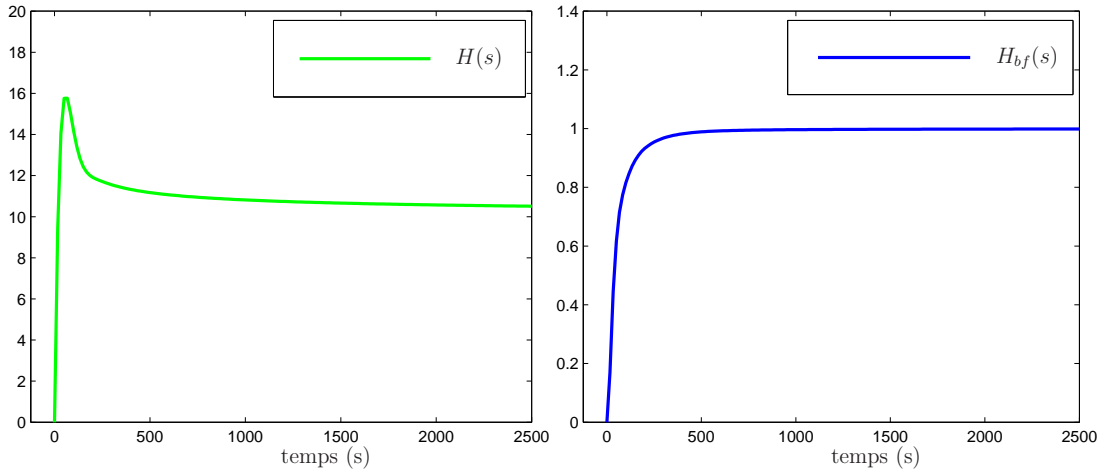


FIGURE 3.20 – Réponses temporelles à un échelon unitaire du modèle non entier initial $H(s)$ (gauche) et du modèle bouclé $H_{bf}(s)$ (droite) par le correcteur par retour de sortie $K(s)$ calculé à partir du modèle entier incertain

L'approche présentée, basée sur la décomposition d'un modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique (ou diffusive), permet donc bien de générer des correcteurs H_∞ stabilisants et répondant à des contraintes de performances imposées au modèle non entier.

3.5 – Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode de synthèse H_∞ pour des modèles non entiers a été proposée. Cette méthode est basée sur l'approximation du modèle non entier par un modèle entier incertain à partir de sa décomposition en une partie exponentielle et une partie apériodique.

Pour ce faire, la partie apériodique (ou partie diffusive) a été approximée en uti-

lisant une procédure d'intégration numérique basée sur la méthode des trapèzes. Cette méthode génère toutefois une erreur relative qui a été prise en compte sous la forme d'une incertitude multiplicative affectant un modèle nominal entier. Un exemple académique a permis d'illustrer cette décomposition.

Une fois le modèle incertain défini, il a été montré qu'il pouvait être utilisé pour déterminer la stabilité du modèle non entier et évaluer ses performances par le calcul de la norme H_∞ d'un modèle augmenté. Ce même modèle augmenté a ensuite été utilisé afin de calculer des correcteurs permettant d'atteindre un objectif de performances garanti, aussi bien pour le modèle entier incertain que pour le modèle non entier de départ. L'exemple académique précédent a confirmé que cette approche permet de déterminer des correcteurs entiers garantissant que le modèle non entier respecte les contraintes H_∞ spécifiées.

Bien que l'approche proposée dans ce chapitre utilise les méthodes H_∞ développées pour les modèles entiers, la décomposition du modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique et l'obtention du modèle incertain associé peuvent s'avérer fastidieuses. Nous proposerons donc, dans le chapitre suivant, des conditions LMI de synthèse H_∞ directement applicables à des modèles non entiers.

Chapitre 4

Commande H_∞ basée sur des modèles non entiers décrits par leur pseudo représentation d'état

Contents

4.1 – Introduction	97
4.2 – Méthodes LMI pour l'analyse en stabilité des systèmes dynamiques non entiers	98
4.2.1 – Le critère de <i>Lyapunov</i>	98
4.2.2 – Méthodes LMI pour l'analyse en stabilité des modèles non entiers	99
4.3 – Méthodes LMI pour l'évaluation de la norme H_∞ des modèles non entiers	104
4.3.1 – Méthodes basées sur l'utilisation d'une pseudo matrice hamiltonienne	105
4.3.2 – Méthodes basées sur l'utilisation du lemme KYP généralisé	121
4.3.3 – Comparaison des conditions LMI proposées	130
4.3.4 – Exemples	131
4.4 – Commande H_∞ des systèmes non entiers commensurables	138
4.4.1 – Retour de pseudo état	138
4.4.2 – Retour de sortie dynamique	141
4.5 – Conclusion	145

4.1 – Introduction

Dans le chapitre 1, il a été montré qu'un système non entier commensurable admet une pseudo représentation d'état de forme similaire à celle des systèmes entiers. Dans ce chapitre, cette similitude est mise à profit pour étendre les méthodes de commande H_∞ , développées pour des modèles entiers sous forme de représentation d'état, au cas des modèles non entiers.

Parmi les différentes méthodes de synthèse de correcteurs H_∞ développées pour des modèles entiers, nous considérons ici celles formulées à l'aide d'inégalités matricielles linéaires (LMI). En effet, ces dernières peuvent être résolues efficacement à l'aide des outils mathématiques de la programmation semi-définie positive (SDP). De plus, comparées aux méthodes analytiques (comme les équations de Riccati par exemple), l'approche LMI présente une plus grande flexibilité lui permettant notamment d'aborder des problèmes de commande complexes [Boyd *et al.*, 1994, Skelton *et al.*, 1997].

Ce chapitre est divisé en trois parties. D'abord des conditions LMI permettant l'analyse en stabilité des modèles non entiers sont présentées. Ces conditions LMI sont basées sur des approches différentes (représentation du domaine d'instabilité, transformation algébrique...) mais ne font pas intervenir dans leur développement la notion d'état et les théories associées (notamment la théorie de *Lyapunov*). Ensuite, l'outil LMI est utilisé pour le calcul de la norme H_∞ des modèles non entiers. Enfin, les résultats précédents permettent de développer des conditions LMI pour la commande H_∞ à base de modèles non entiers faisant intervenir des lois de commande de type retour d'état et retour de sortie dynamique.

4.2 – Méthodes LMI pour l'analyse en stabilité des systèmes dynamiques non entiers

La plupart des méthodes LMI d'analyse de stabilité de systèmes LTI d'ordre entier dérivent de la stabilité au sens de *Lyapunov*. Les paragraphes qui suivent, présentent brièvement la théorie de *Lyapunov* ainsi que les critères de stabilité associés, formulés à l'aide de LMI. Leur extension aux modèles non entiers est ensuite présentée.

4.2.1 – Le critère de *Lyapunov*

Considérons le système LTI entier décrit par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \mathbf{D}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $u(t)$ est l'entrée, $y(t)$ la sortie et $x(t)$ le vecteur d'état du système.

D'après *Lyapunov*, la stabilité interne du système (4.1) peut être étudiée en analysant le système autonome

$$\mathbf{D}x(t) = Ax(t). \quad (4.2)$$

Le système (4.2) est globalement asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction de *Lyapunov* vérifiant les hypothèses du théorème 2.2.8. Soit $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ définie positive, la fonction

$$V(x) = x(t)^T P x(t) \quad (4.3)$$

est une fonction candidate car elle vérifie les trois premières hypothèses du théorème 2.2.8.

Pour qu'elle soit une fonction de *Lyapunov*, il est nécessaire que sa dérivée soit négative le long des trajectoires du système, c'est-à-dire :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) < 0. \quad (4.4)$$

En remplaçant $\dot{x}(t)$ par son expression issue de (4.2), l'inégalité (4.4) devient :

$$\dot{V}(x) = x(t)^T (A^T P + P A) x(t) < 0. \quad (4.5)$$

L'analyse en stabilité interne du système (4.1) se réduit donc au problème de faisabilité LMI suivant.

Théorème 4.2.1 (Critère de stabilité d'un système entier - formulation LMI)

Le système (4.1) est stable si et seulement s'il existe une matrice $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ telle que :

$$A^T P + P A < 0. \quad (4.6)$$

Remarque 4.2.2 *Dans le cas général (non LTI), il n'existe aucune méthode permettant de déterminer l'ensemble des fonctions candidates du théorème 2.2.8. L'incapacité à trouver une fonction candidate $V(x)$ n'implique pas l'instabilité du système.*

Remarque 4.2.3 *Le théorème 4.2.1 fournit une condition nécessaire et suffisante de stabilité interne. Sachant par ailleurs qu'un système entier est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de la matrice dynamique A appartiennent au demi-plan complexe gauche (fig. 2.2.b), le théorème 4.2.1 peut donc également être vu comme un critère permettant de tester l'appartenance des valeurs propres de la matrice A au domaine de stabilité d'un système entier.*

4.2.2 – Méthodes LMI pour l'analyse en stabilité des modèles non entiers

Développer un critère de stabilité similaire à celui du théorème 4.2.1 pour des modèles non entiers décrits par une pseudo représentation d'état ne peut faire appel à la théorie de *Lyapunov*. En effet, comme montré dans la partie 1.3.3, le vecteur $x(t)$ de la pseudo représentation d'état ne représente pas l'état du système.

Cependant, comme indiqué dans la remarque 4.2.3, le problème LMI du théorème 4.2.1 peut également être vu comme un critère d'appartenance des valeurs propres de la matrice A au demi-plan gauche. Tester l'appartenance des valeurs propres d'une matrice à une région particulière du plan complexe peut être résolu en utilisant le formalisme des régions LMI introduit par *Chilali* [Chilali, 1996].

Ces résultats sont la base des critères LMI de stabilité des modèles non entiers présentés dans cette partie.

Dans un premier paragraphe, le cas d'un ordre $1 < \nu < 2$ est considéré. Le domaine de stabilité associé est alors convexe et peut être décrit à l'aide de régions LMI.

Le cas $0 < \nu < 1$ est ensuite abordé. Dans ce cas, le domaine de stabilité n'est plus convexe et ne peut être décrit par des régions LMI.

4.2.2.1 – Cas $1 < \nu < 2$

La stabilité interne (et donc BIBO) d'un système non entier commensurable d'ordre $1 < \nu < 2$ est déterminée par l'appartenance des valeurs propres de sa pseudo matrice d'état A au domaine de stabilité D_M représenté sur la figure 2.2.c. Caractériser la stabilité revient donc à caractériser le lieu des valeurs propres de A . Ce problème de localisation de valeurs propres peut être résolu en utilisant le formalisme des régions LMI introduit par *Chilali* [Chilali, 1996] puis généralisée par *Peaucelle* [Peaucelle, 2000] à travers la notion de \mathbb{D}_R stabilité dans le cas des systèmes d'ordre entier. Selon ce formalisme, le système (4.1) est \mathbb{D}_R stable si et seulement si ses pôles, ou les valeurs propres de la matrice A , appartiennent à la région \mathbb{D}_R du plan complexe, caractérisée par :

$$\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C} : R_{11} + zR_{12} + z^*R_{12}^* + zz^*R_{22} < 0\}, \quad (4.7)$$

auquel est associé la matrice symétrique réelle

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{12}^* & R_{22} \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Ces régions sont nécessairement convexes et symétriques par rapport à l'axe réel du plan complexe.

Le théorème suivant fournit une LMI permettant l'analyse de la \mathbb{D}_R stabilité d'une matrice réelle.

Théorème 4.2.4 (\mathbb{D}_R stabilité [Peaucelle, 2000]) *La matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est \mathbb{D}_R stable si et seulement s'il existe une matrice définie positive $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que :*

$$R_{11} \otimes P + R_{12} \otimes (PA) + R_{12}^* \otimes (A^T P) + R_{22} \otimes (A^T PA) < 0. \quad (4.9)$$

■

En utilisant la notion de \mathbb{D}_R stabilité pour caractériser le sous domaine D_M du plan complexe, le théorème 4.2.4 permet d'obtenir une LMI d'analyse de la BIBO stabilité d'un système non entier.

Théorème 4.2.5 ([Moze et al., 2005]) *Le modèle non entier d'ordre $1 < \nu < 2$, défini par la pseudo représentation d'état (2.20), est BIBO stable si et seulement si $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ tel que :*

$$\begin{bmatrix} (A^T P + PA) \sin(\nu \frac{\pi}{2}) & (A^T P - PA) \cos(\nu \frac{\pi}{2}) \\ (PA - A^T P) \cos(\nu \frac{\pi}{2}) & (A^T P + PA) \sin(\nu \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} < 0. \quad (4.10)$$

■

4.2.2.2 – Cas $0 < \nu < 1$

L'obtention de résultats concernant la stabilité des systèmes non entiers d'ordre ν compris entre 0 et 1 est plus délicate. En effet, une partie du domaine de stabilité défini par la relation (2.4) et représenté sur la figure 2.2.a est dans le demi-plan droit du plan complexe. Cette partie est dans le domaine d'instabilité des modèles d'ordre entier. Pour cette raison, de tels domaines n'ont pas été considérés lors de l'étude des modèles entiers. De plus, le domaine de stabilité dans le cas $0 < \nu < 1$ n'est pas convexe et ne peut donc pas être caractérisé directement à l'aide des régions LMI présentées dans le paragraphe précédent.

Différentes méthodes LMI d'analyse de stabilité spécifiques aux modèles non entiers ont néanmoins été proposées dans la littérature. Ces résultats sont à présent rappelés et commentés vis-à-vis de leur pessimisme respectif ainsi que de leur capacité à être réutilisés dans le cadre du développement de méthodes de synthèse de correcteurs.

La première méthode proposée repose sur une transformation algébrique du système autonome (4.2) en considérant que l'ordre non entier ν est rationnel, ce qui permet d'aboutir au théorème suivant.

Théorème 4.2.6 ([Momani et El-Khazali, 2001]) *Le système non entier (2.20) avec $0 < \nu < 1$ est BIBO stable si $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ telle que :*

$$\left(A^{\frac{1}{\nu}}\right)^T P + P \left(A^{\frac{1}{\nu}}\right) < 0. \quad (4.11)$$

■

Cette première méthode relativement simple à mettre en place, s'avère pessimiste car le domaine de stabilité n'est pas entièrement caractérisé par la LMI (4.11). Ce n'est donc qu'une condition suffisante [Moze et al., 2005].

Une condition nécessaire et suffisante a été obtenue dans [Moze et al., 2005] en effectuant une transformation géométrique du domaine de stabilité dans le cas $0 < \nu < 1$.

Théorème 4.2.7 ([Moze et al., 2005]) *Le système non entier (2.20) avec $0 < \nu < 1$ est BIBO stable si et seulement si $\exists P \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ telle que :*

$$\left(-(-A)^{\frac{1}{2-\nu}}\right)^T P + P \left(-(-A)^{\frac{1}{2-\nu}}\right) < 0. \quad (4.12)$$

■

Il est démontré dans [Moze *et al.*, 2005] que le domaine de stabilité d'un modèle non entier d'ordre $0 < \nu < 1$ est entièrement caractérisé par le théorème 4.2.7, ce qui confirme son caractère nécessaire et suffisant. Mais bien que ce résultat soit intéressant pour l'analyse de modèles non entiers commensurables, en déduire une LMI de synthèse s'avère compliqué du fait de la non linéarité en la matrice A . En effet, considérons l'exemple d'une loi de commande par retour d'état $u(t) = r(t) - K_{re}x(t)$ où $r(t)$ représente la consigne et K_{re} est un gain matriciel constant. La matrice dynamique du système bouclé vaut $(A - BK_{re})$. Le critère de stabilité du théorème 4.2.7 peut être utilisé afin de caractériser la stabilité de ce dernier et conduit à l'inégalité matricielle :

$$\left(-(-A + BK_{re})^{\frac{1}{2-\nu}}\right)^T P + P \left(-(-A + BK_{re})^{\frac{1}{2-\nu}}\right) < 0. \quad (4.13)$$

L'élévation de la matrice d'état en boucle fermée à la puissance $\frac{1}{2-\nu}$ complique la mise en place d'un changement de variable linéarisant permettant la synthèse du gain K_{re} .

Une autre condition de stabilité, basée sur la caractérisation du domaine d'instabilité est aussi issue de [Moze *et al.*, 2005]. En effet, pour $0 < \nu < 1$, le domaine d'instabilité d'un modèle non entier commensurable est convexe.

Théorème 4.2.8 ([Moze *et al.*, 2005]) *Le modèle non entier (2.20) avec $0 < \nu < 1$ est BIBO stable si et seulement s'il n'existe aucune matrice hermitienne non négative Q telle que :*

$$rAQ + \bar{r}QA^T < 0 \quad (4.14)$$

avec $r = e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}}$. ■

Bien que le théorème 4.2.8 fournisse une condition nécessaire et suffisante de stabilité, l'utilisateur devra néanmoins choisir avec soin l'algorithme utilisé pour la résolution de la LMI (4.14). En effet, la non convergence de cette LMI vers une matrice Q implique la stabilité du système. Un défaut de l'algorithme peut donc facilement entraîner de mauvaises conclusions. En outre, aucune LMI de synthèse ne peut être déduite du théorème 4.2.8 car la LMI de stabilité est basée sur la non existence d'une matrice.

La dernière méthode présentée dans ce qui suit, contourne le problème de non convexité du domaine de stabilité d'un système non entier commensurable d'ordre $0 < \nu < 1$ en utilisant le concept des régions LMI généralisées (de l'anglais "Generalized LMI" ou GLMI, introduit par Chilali [Chilali, 1996] et développé par Bachelier [Bachelier, 1998, Bachelier et Pradin, 1999].

Définition 4.2.9 (Région GLMI [Chilali, 1996]) Une région \mathcal{D} du plan complexe est une région GLMI d'ordre l si $\exists \theta_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$, $\psi_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$, $H_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$ et $J_k \in \mathbb{C}^{l \times l}$ ($\forall k \in \{1, \dots, m\}$), tels que

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \exists w = \begin{bmatrix} w_1 \cdots w_m \end{bmatrix}' \in \mathbb{C}^m \text{ t.q. } f_{\mathcal{D}}(z, w) < 0, \ g_{\mathcal{D}}(w) = 0 \right\}, \quad (4.15)$$

où

$$f_{\mathcal{D}}(z, w) = \sum_{k=1}^m (\theta_k w_k + \theta_k^* \bar{w}_k + \psi_k z w_k + \psi_k^* \bar{w}_k \bar{z}) \quad (4.16)$$

et

$$g_{\mathcal{D}}(w) = \sum_{k=1}^m (H_k w_k + J_k \bar{w}_k). \quad (4.17)$$

Il est montré dans [Farges et al., 2010] que le domaine de stabilité \mathcal{D}_s de la figure 2.2.a est une région GLMI car il peut être représenté par l'union de deux régions GLMI. Or, un lemme permettant de tester l'appartenance des valeurs propres d'une matrice à une région GLMI du plan complexe a aussi été développé par *Chilali* au travers du concept de \mathcal{D} -stabilité.

Définition 4.2.10 (\mathcal{D} -stabilité d'une matrice) Une matrice A est \mathcal{D} -stable si et seulement si ses valeurs propres sont strictement situées dans la région \mathcal{D} du plan complexe.

Lemme 4.2.11 ([Chilali, 1996]) Soient $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ et \mathcal{D} une région GLMI. A est \mathcal{D} -stable si et seulement si $\exists m$ matrices $X_k \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telles que :

$$\sum_{k=1}^m (\theta_k \otimes X_k + \theta_k^* \otimes X_k^* + \psi_k \otimes (AX_k) + \psi_k^* \otimes (AX_k)^*) < 0 \quad (4.18)$$

et

$$\sum_{k=1}^m (H_k \otimes X_k + J_k \otimes X_k^*) = \mathbf{0}_{nl \times nl}. \quad (4.19)$$

■

Une condition LMI nécessaire et suffisante de stabilité d'un système non entier d'ordre $0 < \nu < 1$ peut donc s'obtenir en utilisant le lemme 4.2.11 sur la région GLMI \mathcal{D}_s du plan complexe, définie par :

$$\mathcal{D}_s = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| > \nu \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (4.20)$$

Théorème 4.2.12 ([Farges *et al.*, 2010]) *Le modèle non entier (2.20) avec $0 < \nu < 1$ est stable si et seulement s'il existe une matrice $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ définie positive telle que :*

$$(rX + \bar{r}\bar{X})^T A^T + A(rX + \bar{r}\bar{X}) < 0 \quad (4.21)$$

où $r = e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}}$. ■

La LMI (4.21) caractérise entièrement le domaine de stabilité d'un modèle non entier d'ordre $0 < \nu < 1$. En outre, il est assez simple de déduire une LMI de synthèse à partir du théorème 4.2.12. Il faut remarquer pour cela que bien que la matrice X de la LMI (4.21) soit complexe, $(rX + \bar{r}\bar{X})$ est une matrice réelle non symétrique. Un retour d'état stabilisant pourra donc être développé en remplaçant A par $A - BK_{re}$ dans la LMI (4.21) et en utilisant un changement de variable linéarisant similaire à celui développé dans le cas des modèles entiers.

Après cette analyse en stabilité des modèles non entiers, une analyse en performances est maintenant présentée.

4.3 – Méthodes LMI pour l'évaluation de la norme H_∞ des modèles non entiers

Comme annoncé dans la partie 2.3.1 du chapitre 2, deux approches sont possibles en analyse pour calculer la norme H_∞ d'un système. La première approche consiste à évaluer dans un premier temps sa stabilité (par exemple à l'aide des méthodes LMI présentées dans la section précédente). Si le système est stable, sa norme L_∞ est égale à sa norme H_∞ , sinon cette dernière est infinie. La seconde approche consiste à calculer directement la norme H_∞ du système.

Dans les parties 4.3.1 et 4.3.2 sont présentées différentes méthodes LMI de calcul de la norme H_∞ , basées respectivement sur l'évaluation des valeurs propres d'une pseudo matrice Hamiltonienne et sur le lemme de Kalman-Yakubovič-Popov (KYP) [Iwasaki et Hara, 2005]. Certaines de ces méthodes nécessitent de vérifier a priori la stabilité du modèle et d'autres non. Ensuite, le pessimisme associé à chacune des méthodes est discuté dans la partie 4.3.3. Enfin, des exemples illustrant ce pessimisme sont présentés dans la partie 4.3.4.

4.3.1 – Méthodes basées sur l'utilisation d'une pseudo matrice hamiltonienne

Dans le cas d'un modèle entier, la norme H_∞ du système peut être calculée de manière itérative en évaluant à chaque pas de l'algorithme la localisation des valeurs propres d'une matrice hamiltonienne particulière. Cette méthode est connue sous le nom de gamma-itération [Boyd *et al.*, 1989]. Ce problème peut être également formulé à l'aide de LMI, conduisant au lemme borné réel [Gahinet et Apkarian, 1994].

Cette approche a été récemment généralisée au cas des modèles non entiers [Moze, 2007, Moze *et al.*, 2005, Sabatier *et al.*, 2005] et fait intervenir une pseudo matrice hamiltonienne. Le problème de localisation des valeurs propres de la pseudo matrice hamiltonienne peut ensuite être reformulé comme une inégalité de Riccati puis comme un problème LMI. Ces résultats, développés dans [Moze, 2007], sont rappelés ici et complétés, notamment en ce qui concerne la suffisance de la formulation LMI du calcul de la norme L_∞ lorsque $1 < \nu < 2$. Enfin, une formulation LMI originale, basée sur l'utilisation des régions GLMI, fournit une condition nécessaire et suffisante pour le calcul de la norme L_∞ quel que soit l'ordre ν .

4.3.1.1 – Définition de la pseudo matrice hamiltonienne d'un modèle non entier

Soit le système Σ défini par la pseudo représentation d'état 2.20 et soit γ un réel positif. La relation (2.13) implique que la norme L_∞ de la matrice de transfert $T_{zw}(s)$ est inférieure à γ si et seulement si :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \max_{i=\{1 \dots \min(m,p)\}} \sqrt{\lambda_i(T_{zw}(j\omega)^* T_{zw}(j\omega))} < \gamma. \quad (4.22)$$

Le carré de l'inégalité précédente est :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \max_{i=\{1 \dots \min(m,p)\}} \lambda_i(T_{zw}(j\omega)^* T_{zw}(j\omega)) < \gamma^2. \quad (4.23)$$

Les propriétés des valeurs propres permettent de réécrire la relation (4.23) comme suit :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \max_{i=\{1 \dots \min(m,p)\}} \lambda_i(\gamma^2 I - T_{zw}(j\omega)^* T_{zw}(j\omega)) > 0. \quad (4.24)$$

L'inégalité (4.24) peut s'écrire comme un problème de définie positivité :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, (\gamma^2 I - T_{zw}(j\omega)^* T_{zw}(j\omega)) > 0. \quad (4.25)$$

L'inégalité matricielle (4.25) est de dimension infinie car elle dépend de $\omega \in \mathbb{R}$. Pour s'affranchir de la pulsation ω , une pseudo représentation d'état de $\phi(s) = \gamma^2 I - T_{zw}(s)^* T_{zw}(s)$, dont un schéma bloc est donné sur la figure 4.1, est tout d'abord construite.

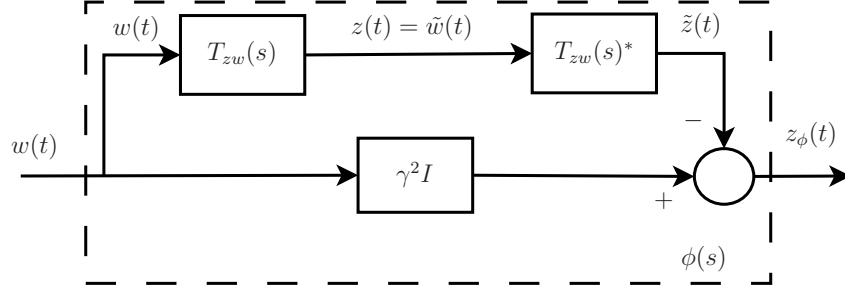


FIGURE 4.1 – Schéma bloc de $\phi(s)$

Une pseudo représentation du transfert $T_{zw}(s)$ est donnée par :

$$\begin{cases} D^\nu x(t) &= A x(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zw} w(t) \end{cases} . \quad (4.26)$$

Comme pour les modèles entiers, le conjugué de la fonction de transfert d'un système non entier commensurable à coefficients réels évaluée à la pulsation ω est égal à cette fonction de transfert évaluée en $-\omega$, soit :

$$\overline{T_{zw}(j\omega)} = T_{zw}(-j\omega). \quad (4.27)$$

La relation (4.27) permet donc de déterminer la matrice de transfert associée à la pseudo représentation d'état (4.26) évaluée à la pulsation $-j\omega$, à savoir :

$$T_{zw}(-j\omega) = C_z ((-j\omega)^\nu I - A)^{-1} B_w + D_{zw}, \quad (4.28)$$

soit

$$T_{zw}(-j\omega)^T = B_w^T (e^{-\nu j\pi} (j\omega)^\nu I - A^T)^{-1} C_z^T + D_{zw}^T, \quad (4.29)$$

ou encore

$$T_{zw}(-j\omega)^T = e^{\nu j\pi} B_w^T ((j\omega)^\nu I - e^{\nu j\pi} A^T)^{-1} C_z^T + D_{zw}^T. \quad (4.30)$$

$T_{zw}(s)^*$ admet donc la pseudo représentation d'état :

$$\begin{cases} D^\nu \tilde{x}(t) &= e^{\nu j\pi} A^T \tilde{x}(t) + e^{\nu j\pi} C_z^T \tilde{w}(t) \\ \tilde{z}(t) &= B_w^T \tilde{x}(t) + D_{zw}^T \tilde{w}(t) \end{cases} . \quad (4.31)$$

Une pseudo représentation d'état de la mise en série $T_{zw}(s)^*T_{zw}(s)$ est donc :

$$\begin{cases} D^\nu \hat{x}(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ e^{\nu j\pi} C_z^T C_z & e^{\nu j\pi} A^T \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} B_w \\ e^{\nu j\pi} C_z^T D_{zw} \end{bmatrix} w(t) \\ \tilde{z}(t) = \begin{bmatrix} D_{zw}^T C_z & B_w^T \end{bmatrix} \hat{x}(t) + D_{zw}^T D_{zw} w(t) \end{cases} \quad (4.32)$$

où $\hat{x} = \begin{bmatrix} x^T & \tilde{x}^T \end{bmatrix}^T$. A partir de la relation (4.32), une pseudo représentation d'état de $\phi(s)$ est donc :

$$\begin{cases} D^\nu \eta(t) = A_\phi \eta(t) + B_\phi w(t) \\ z_\phi(t) = C_\phi \eta(t) + D_\phi w(t) \end{cases}, \quad (4.33)$$

où :

$$\begin{aligned} A_\phi &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ e^{\nu j\pi} C_z^T C_z & e^{\nu j\pi} A^T \end{bmatrix} & B_\phi &= \begin{bmatrix} B_w \\ e^{\nu j\pi} C_z^T D_{zw} \end{bmatrix}, \\ C_\phi &= - \begin{bmatrix} D_{zw}^T C_z & B_w^T \end{bmatrix} & D_\phi &= (\gamma^2 I - D_{zw}^T D_{zw}). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Compte tenu des calculs précédents pour obtenir la matrice ϕ , la relation (4.22) peut être utilisée pour calculer la norme L_∞ du transfert T_{zw} . Si par ailleurs le transfert T_{zw} correspond à un modèle stable, alors la relation (4.22) permet de calculer la norme H_∞ du modèle, via le théorème suivant.

Théorème 4.3.1 *Soit une pseudo représentation d'état stable de la forme (4.26) et soit un nombre réel positif $\gamma > \bar{\sigma}(D_{zw})$. $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} < \gamma$ si et seulement si la pseudo matrice hamiltonienne :*

$$H_\gamma \triangleq \begin{bmatrix} A + B_w R D_{zw}^T C_z & B_w R B_w^T \\ e^{\nu j\pi} C_z^T (I + D_{zw} R D_{zw}^T) C_z & e^{\nu j\pi} (A^T + C_z^T D_{zw} R B_w^T) \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

où $R = (\gamma^2 I - D_{zw}^T D_{zw})^{-1}$, n'a pas de valeur propre sur $\mathbb{C}_{\nu 0} = \{(j\omega)^\nu = |\omega|^\nu e^{sign(\omega)\nu j\frac{\pi}{2}}, \omega \in \mathbb{R}\}$. ■

Preuve Soit $\phi(s) = \gamma^2 I - T_{zw}(-s)^* T_{zw}(s)$. La norme L_∞ de $T_{zw}(s)$ est bornée par le scalaire γ i.e. $\|T_{zw}(s)\|_{L_\infty} < \gamma$ si et seulement si $\phi(j\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$. Sachant que la limite de $T_{zw}(-j\omega)^* T_{zw}(j\omega)$ lorsque ω tend vers l'infini correspond au terme direct de la pseudo représentation d'état (4.32), soit :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} T_{zw}(-j\omega)^* T_{zw}(j\omega) = D_{zw}^T D_{zw}, \quad (4.36)$$

et que $\gamma > \bar{\sigma}(D_{zw})$ implique :

$$\gamma^2 > \sigma_{\max}(D_{zw}^T D_{zw}), \quad (4.37)$$

on peut remarquer que :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi(j\omega) = \gamma^2 - \sigma_{max}(D_{zw}^T D_{zw}) > 0. \quad (4.38)$$

De plus, $\phi(j\omega)$ est une fonction continue en ω . Alors $\phi(j\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\phi(j\omega)$ est non singulière pour tout $\omega \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Cela implique que $\phi(s)$ n'ait pas de zéro imaginaire pur ou que $\phi(s)^{-1}$ n'ait pas de pôle imaginaire pur. Etant données les relations entre les valeurs propres et les pôles d'un modèle non entier commensurable [Matignon, 1996], $\phi(s)^{-1}$ n'a aucun pôle sur l'axe imaginaire si et seulement si la pseudo matrice d'état de $\phi(s)^{-1}$ n'a aucune valeur propre sur $\mathbb{C}_{\nu 0} = \{(j\omega)^\nu = |\omega|^\nu e^{sign(\omega)\nu j \frac{\pi}{2}}, \omega \in \mathbb{R}\}$.

Inverser la pseudo représentation d'état (4.33) de $\phi(s)$ permet de déterminer une représentation d'état de $\phi(s)^{-1}$. Soient $e(t) = z_\phi(t)$, $g(t) = w(t)$ et $\alpha(t) = \eta(t)$, respectivement l'entrée, la sortie et le pseudo vecteur d'état de $\phi(s)^{-1}$. Alors :

$$g(t) = w(t) = D_\phi^{-1}(z_\phi(t) - C_\phi \eta(t)), \quad (4.39)$$

soit

$$g(t) = -D_\phi^{-1}C_\phi \alpha(t) + D_\phi^{-1}e(t), \quad (4.40)$$

l'équation d'état de $\phi(s)^{-1}$ étant définie par :

$$D^\nu \eta(t) = A_\phi \eta(t) + B_\phi g(t). \quad (4.41)$$

En utilisant la relation (4.40) dans la pseudo équation d'état (4.41) donne :

$$D^\nu \eta(t) = A_\phi \eta(t) + B_\phi (-D_\phi^{-1}C_\phi \alpha(t) + D_\phi^{-1}e(t)), \quad (4.42)$$

soit

$$D^\nu \eta(t) = (A_\phi - B_\phi D_\phi^{-1}C_\phi) \eta(t) + B_\phi D_\phi^{-1}e(t). \quad (4.43)$$

Par conséquent, $\phi(s)^{-1}$ admet comme représentation d'état :

$$\begin{cases} D^\nu \alpha(t) = H_\gamma \alpha(t) + B_\gamma e(t) \\ g(t) = C_\gamma \alpha(t) + D_\gamma e(t) \end{cases} \quad (4.44)$$

où

$$\begin{aligned} H_\gamma &= A_\phi - B_\phi D_\phi^{-1}C_\phi \\ &= \begin{bmatrix} A + B_w R D_{zw}^T C_z & B_w R B_w^T \\ e^{\nu j \pi} C_z^T (I + D_{zw} R D_{zw}^T) C_z & e^{\nu j \pi} (A^T + C_z^T D_{zw} R B_w^T) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$B_\gamma = B_\phi D_\phi^{-1} = \begin{bmatrix} B_w R \\ e^{\nu j\pi} C_z^T D_{zw} R \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

$$C_\gamma = -D_\phi^{-1} C_\phi = \begin{bmatrix} R D_{zw}^T C_z & R B_w^T \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

$$D_\gamma = D_\phi^{-1} = R, \quad (4.48)$$

avec $R = (\gamma^2 I - D_{zw}^T D_{zw})^{-1}$.

$\phi(s)$ est donc non singulière si et seulement si les valeurs propres de la matrice H_γ n'appartiennent pas à $\mathbb{C}_{\nu 0}$. ■

Remarque 4.3.2 Il est important de noter que la pseudo matrice hamiltonienne H_γ est complexe et n'a pas les propriétés d'une matrice hamiltonienne réelle (son spectre n'est par exemple pas symétrique par rapport à l'axe imaginaire). De plus, lorsque la norme H_∞ est supérieure à γ , les valeurs propres de H_γ sont sur $\mathbb{C}_{\nu 0}$ et non sur l'axe imaginaire comme pour les modèles entiers.

Un algorithme d'optimisation dichotomique, appelé “ γ -itération”, directement dérivé du théorème 4.3.1, peut permettre d'évaluer la norme H_∞ d'un système non entier. Les différentes étapes de la γ -itération sont les suivantes :

1. évaluer la stabilité du modèle étudié.
2. choisir $[\gamma_{min}, \gamma_{max}]$ tels que $\gamma_{min} > \bar{\sigma}(D_{zw})$.
3. pour $\gamma = (\gamma_{min} + \gamma_{max})/2$, déterminer les valeurs propres de H_γ .
 - si ces valeurs propres ne sont pas sur $\mathbb{C}_{\nu 0}$, on réduit γ en prenant comme nouvel intervalle $[\gamma_{min}, \gamma]$.
 - si elles sont sur $\mathbb{C}_{\nu 0}$, on augmente γ en prenant comme nouvel intervalle $[\gamma, \gamma_{max}]$.
4. l'étape 2 est répétée jusqu'à ce que $\gamma - \gamma_{min} < \delta_\gamma$ (le critère d'arrêt δ_γ est choisi en fonction de la précision souhaitée).

Des algorithmes similaires sont utilisés pour des systèmes entiers dans la bibliothèque SLICOT [Benner et al., 1997] et dans plusieurs logiciels de calcul numérique comme MATLAB® [Balas et al., 2007] et SCILAB [Campbell et al., 2009]. Une version de cet algorithme sera prochainement disponible pour les systèmes non entiers dans la boîte à outils CRONE [Malti et al., 2011].

4.3.1.2 – Formulations LMI basées sur une inégalité de Riccati

Le théorème 4.3.1 donne une borne supérieure de la norme H_∞ de la matrice de transfert $T_{zw}(s)$ par l'analyse de la position des valeurs propres de la pseudo matrice hamiltonienne H_γ dans le plan complexe, soit : $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} < \gamma$ si et seulement si H_γ n'a aucune valeur propre dans $\mathbb{C}_{\nu 0}$. En pratique, seule la demi-droite $\mathbb{C}_{\nu 0}^+ = \{(j\omega)^\nu, \omega \in \mathbb{R}^+\}$ importe vraiment : $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} < \gamma$ si et seulement si H_γ n'a aucune valeur propre dans $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$. En effet, les matrices de transfert des systèmes dynamiques sont toujours écrites pour des pulsations positives $\omega \in \mathbb{R}^+$, et H_γ a été écrite en ne considérant que ces pulsations positives. Pour des fréquences négatives, une pseudo matrice hamiltonienne H_γ^- peut être définie comme suit :

$$H_\gamma^- = \begin{bmatrix} A + B_w R D_{zw}^T C_z & B_w R B_w^T \\ e^{-\nu j\pi} C_z^T (I + D_{zw} R D_{zw}^T) C_z & e^{-\nu j\pi} (A^T + C_z^T D_{zw} R B_w^T) \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Etant donné que le gain de $T_{zw}(j\omega)$ est une fonction paire de ω (c'est-à-dire que $|T_{zw}(j\omega)|$ est symétrique par rapport à la droite $\omega = 0$), les valeurs propres de H_γ et de H_γ^- sont conjuguées. H_γ a donc une valeur propre sur le segment $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$ si et seulement si H_γ^- a une valeur propre conjuguée sur le segment $\mathbb{C}_{\nu 0}^- = \{(j\omega)^\nu, \omega \in \mathbb{R}^-\}$.

Considérons maintenant le théorème suivant permettant de tester l'existence de valeurs propres d'une matrice hamiltonienne sur l'axe imaginaire en utilisant une inégalité de Riccati.

Théorème 4.3.3 ([Scherer et Weiland, 2005]) *La matrice hamiltonienne*

$$H = \begin{bmatrix} \tilde{A} & S \\ -Q & -\tilde{A}^* \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

$\tilde{A} = \tilde{A}^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $S = S^T \succ 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, n'a aucune valeur propre sur l'axe imaginaire si et seulement s'il existe une matrice hermitienne $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ vérifiant l'inégalité de Riccati

$$\tilde{A}^* X + X \tilde{A} + X S X + Q < 0. \quad (4.51)$$

■

Effectuons maintenant une rotation d'angle $\theta = (1 - \nu)\frac{\pi}{2}$ de la matrice H_γ de sorte que le segment $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$ coïncide avec l'ensemble \mathbb{C}_0^+ des imaginaires purs, ce qui conduit à introduire la matrice H'_γ telle que :

$$H'_\gamma = e^{j\theta} H_\gamma, \quad (4.52)$$

soit :

$$H'_\gamma = \begin{bmatrix} r(A + B_w R D_{zw}^T C_z) & r B_w R B_w^T \\ -\bar{r} C_z^T (I + D_{zw} R D_{zw}^T) C_z & -\bar{r} (A^T + C_z^T D_{zw} R B_w^T) \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

où $r = e^{j\theta} = e^{(1-\nu)j\frac{\pi}{2}}$. En utilisant cette nouvelle matrice, le théorème 4.3.1 permet d'affirmer que $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} < \gamma$ si et seulement si la matrice H'_γ n'a aucune valeur propre sur \mathbb{C}_0^+ qui est une partie de l'axe imaginaire. La matrice H'_γ n'étant pas hamiltonienne, le théorème 4.3.3 ne peut donc pas être appliqué. Pour résoudre ce problème, la matrice

$$H = U H'_\gamma U^{-1}, \quad (4.54)$$

est définie, avec $U = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & rI \end{bmatrix}$.

La matrice H s'écrit donc :

$$H = \begin{bmatrix} r(A + B_w R D_{zw}^T C_z) & B_w R B_w^T \\ -C_z^T (I + D_{zw} R D_{zw}^T) C_z & -\bar{r} (A^T + C_z^T D_{zw} R B_w^T) \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Les matrices H'_γ et H possèdent les mêmes valeurs propres car elles sont semblables. De plus, H est une matrice hamiltonienne. Le théorème 4.3.3 peut donc être appliqué avec :

$$\tilde{A} = r(A + B_w R D_{zw}^T C_z), \quad (4.56)$$

$$S = B_w R B_w^T \quad \text{et} \quad Q = C_z^T (I + D_{zw} R D_{zw}^T) C_z. \quad (4.57)$$

Ainsi, il est possible d'écrire que $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} < \gamma$ si et seulement s'il existe une matrice hermitienne $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle que :

$$\begin{aligned} & \bar{r} (A^T + C_z^T D_{zw} R B_w^T) X + X r (A + B_w R D_{zw}^T C_z) + \\ & X B_w R B_w^T X + C_z^T (I + D_{zw} R D_{zw}^T) C_z < 0, \end{aligned} \quad (4.58)$$

ou

$$\begin{aligned} & \bar{r} A^T X + X r A + C_z^T C_z + \\ & (X B_w + \bar{r} C_z^T D_{zw}) R (B_w^T X + r D_{zw}^T C_z) < 0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

En utilisant le complément de Schur avec $R = (\gamma^2 I - D_{zw}^T D_{zw})^{-1}$, l'inégalité (4.59) devient :

$$\begin{bmatrix} \bar{r} A^T X + X r A + C_z^T C_z & (X B_w + \bar{r} C_z^T D_{zw}) \\ (B_w^T X + r D_{zw}^T C_z) & -(\gamma^2 I - D_{zw}^T D_{zw}) \end{bmatrix} < 0, \quad (4.60)$$

qui est encore équivalente à :

$$\begin{bmatrix} \bar{r}A^T X + XrA & XB_w \\ B_w^T X & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{r}C_z^T \\ D_{zw}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rC_z & D_{zw} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.61)$$

Le complément de Schur peut à nouveau être utilisé afin de reformuler l'inégalité (4.61) comme suit :

$$\begin{bmatrix} \bar{r}A^T X + XrA & XB_w & \bar{r}C_z^T \\ B_w^T X & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ rC_z & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.62)$$

ce qui conduit au théorème suivant.

Théorème 4.3.4 *Soit une pseudo représentation d'état stable de la forme (4.26). Soient également $\gamma > \bar{\sigma}(D_{zw})$ un réel positif et l'inégalité suivante :*

$$\begin{bmatrix} \bar{r}A^T X + XrA & XB_w & \bar{r}C_z^T \\ B_w^T X & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ rC_z & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.63)$$

avec $r = e^{(1-\nu)j\frac{\pi}{2}}$.

Cas 1 ($1 < \nu < 2$) : La norme H_∞ du transfert T_{zw} est bornée par γ si et seulement s'il existe une matrice $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle que (4.63).

Cas 2 ($0 < \nu < 1$) : S'il existe une matrice $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle que (4.63), alors la norme H_∞ du transfert T_{zw} est bornée par γ . ■

La justification des deux cas précédents est présentée à la suite mais le théorème 4.3.4 impose en premier lieu une remarque.

Remarque 4.3.5 *Le fait que l'appartenance des valeurs propres de H à tout l'axe imaginaire (et non pas seulement à \mathbb{C}_0^+) soit étudiée pourrait laisser penser que le théorème 4.3.4 introduit un certain pessimisme, mais ce n'est pas le cas. En effet, considérons la fraction rationnelle :*

$$F(x) = \frac{B(x)}{A(x)} = \frac{\prod_{k=0}^{N_z} (x - b_k)}{\prod_{k=0}^{N_p} (x - a_k)}, \quad (4.64)$$

où $N_z < N_p$, $a_k < 0$ avec $a_k = \rho_k e^{j\theta_k}$, $\rho_k > 0$, $\nu\frac{\pi}{2} < |\theta_k| < \pi$ et $1 < \nu < 2$.

La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto F(x) \end{aligned} \quad (4.65)$$

est une fonction holomorphe sur l'arc de disque

$$D = \left\{ \rho e^{j\theta} \mid \rho > 0, |\theta| < \nu \frac{\pi}{2} \right\} \quad (4.66)$$

car le polynôme A n'a aucune racine dans D . Comme le domaine D est non borné, plaçons-nous sur

$$D_R = \left\{ \rho e^{j\theta} \mid 0 < \rho < R, |\theta| < \nu \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (4.67)$$

Comme la fonction f est holomorphe sur D_R et continue sur l'adhérence de D_R , f atteint son maximum sur la frontière de D_R . Donc $\forall x \in D_R$,

$$\begin{aligned} |f(x)| \leq \max \left\{ \sup \left(|f(\rho e^{+j\nu \frac{\pi}{2}})|, 0 < \rho < R \right), \right. \\ \sup \left(|f(\rho e^{-j\nu \frac{\pi}{2}})|, 0 < \rho < R \right), \\ \left. \sup \left(|f(R e^{-j\theta})|, -\nu \frac{\pi}{2} < \theta < \nu \frac{\pi}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Comme $N_z < N_p$, $\sup \left(|f(R e^{-j\theta})|, -\nu \frac{\pi}{2} < \theta < \nu \frac{\pi}{2} \right)$ tend vers 0 quand R tend vers l'infini. Donc quand R tend vers $+\infty$, $\forall x \in D$

$$\begin{aligned} |f(x)| \leq \max \left\{ \sup \left(|f(\rho e^{+j\nu \frac{\pi}{2}})|, 0 < \rho < R \right), \right. \\ \left. \sup \left(|f(\rho e^{-j\nu \frac{\pi}{2}})|, 0 < \rho < R \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.69)$$

et comme $|f(\rho e^{+j\nu \frac{\pi}{2}})| = |f(\rho e^{-j\nu \frac{\pi}{2}})|$, alors $\forall x \in D$

$$|f(x)| \leq \max \left\{ \sup \left(|f(\rho e^{+j\nu \frac{\pi}{2}})|, 0 < \rho < R \right) \right\}, \quad (4.70)$$

soit

$$\sup(f(x), x \in D) \leq \max \left\{ \sup \left(|f(\rho e^{+j\nu \frac{\pi}{2}})|, 0 < \rho < R \right) \right\}. \quad (4.71)$$

Comme la droite $\{-x e^{j\nu \frac{\pi}{2}}, x \geq 0\}$ est incluse dans D , on peut conclure que

$$\|f(-x e^{j\nu \frac{\pi}{2}})\| \leq \|f(x e^{j\nu \frac{\pi}{2}})\|, \forall x \geq 0. \quad (4.72)$$

Ce résultat implique qu'une valeur propre de H_γ apparaîtra toujours sur $\{x e^{j\nu \frac{\pi}{2}}, x > 0\}$, c'est-à-dire sur $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$, avant qu'une autre ne puisse apparaître sur $\{-x e^{j\nu \frac{\pi}{2}}, x > 0\}$. Comme après rotation, $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$ devient le demi-axe des imaginaires purs positifs, le théorème 4.3.4 n'est donc en aucun cas pessimiste.

Nous allons maintenant montrer que la condition LMI du théorème 4.3.4 est nécessaire et suffisante dans le cas $1 < \nu < 2$ et uniquement suffisante dans le cas $0 < \nu < 1$.

Pour servir de support à cette discussion, les matrices A , B_w , C_z et D_{zw} d'une pseudo représentation d'état stable de la forme (4.26) font l'objet d'un tirage aléatoire. La localisation des valeurs propres des matrices A , H_γ et H'_γ est ensuite étudiée.

Dans le cas $1 < \nu < 2$, ces valeurs propres sont données sur la figure 4.2 lorsque $\|T_{zw}\|_{H_\infty} < \gamma$ et sur la figure 4.3 lorsque $\|T_{zw}\|_{H_\infty} \geq \gamma$.

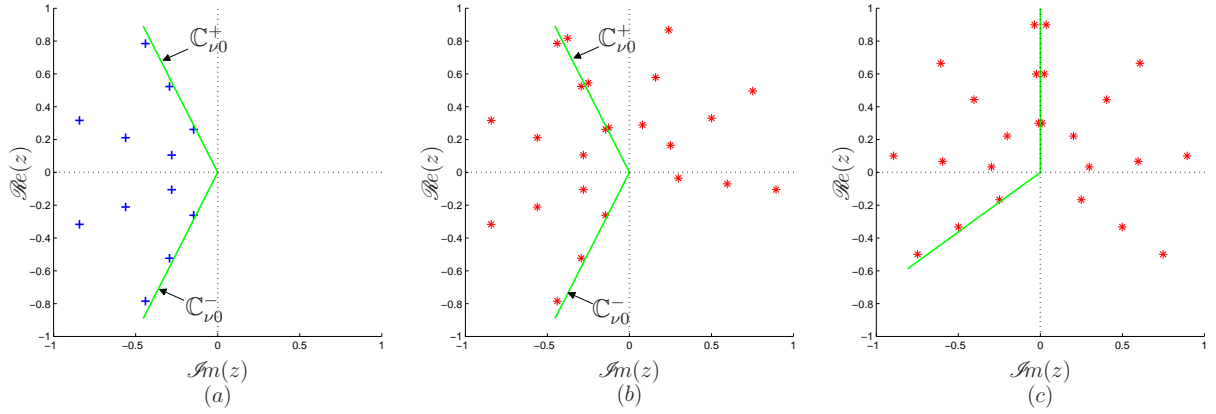


FIGURE 4.2 – Valeurs propres des matrices A (a), H_γ (b) et H'_γ (c) pour $\nu = 1.3$ et $\|T_{zw}\|_{H_\infty} < \gamma$

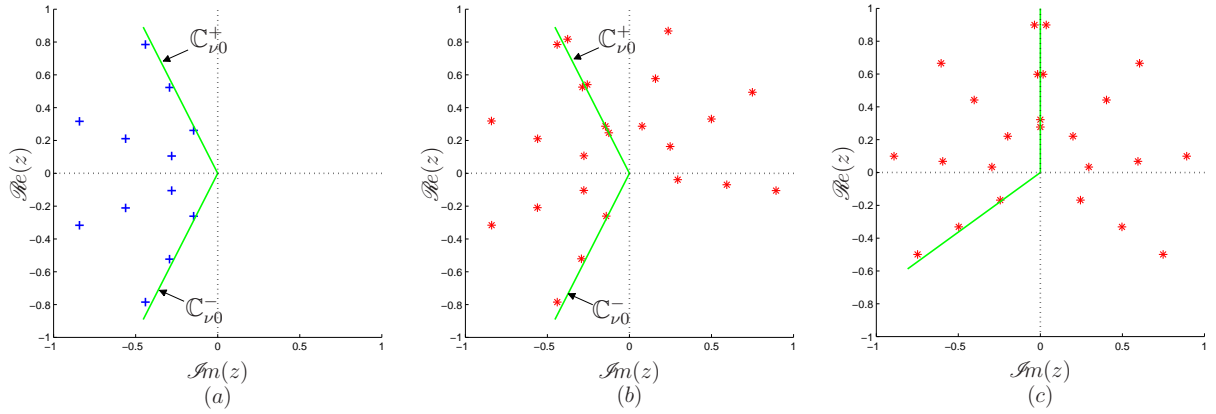


FIGURE 4.3 – Valeurs propres des matrices A (a), H_γ (b) et H'_γ (c) pour $\nu = 1.3$ et $\|T_{zw}\|_{H_\infty} > \gamma$

On remarque tout d'abord que les valeurs propres de la matrice A appartiennent bien au domaine de stabilité. De plus, lorsque $\|T_{zw}\|_{H_\infty} < \gamma$, il n'y a aucune valeur propre de H_γ sur $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$, soit aucune valeur propre de H'_γ sur \mathbb{C}_0^+ . Par ailleurs, lorsque $\|T_{zw}\|_{H_\infty} > \gamma$,

on remarque que certaines valeurs propres de H_γ sont situées sur $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$ (celles de H'_γ étant donc sur \mathbb{C}_0^+). La discussion concernant la nécessité et suffisance du théorème 4.3.4 est maintenant menée dans le cas où $\|T_{zw}\|_{H_\infty} < \gamma$. Dans ce cas, les valeurs propres de la pseudo matrice hamiltonienne H'_γ (matérialisées par des étoiles rouges sur la figure 4.2.c) sont localisées dans un domaine \mathcal{D}_γ^ν du plan complexe, symétrique par rapport à \mathbb{C}_0^+ et défini par :

$$\mathcal{D}_\gamma^\nu = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{3\pi}{2} + \nu\pi < \arg(z) < \frac{5\pi}{2} - \nu\pi\}. \quad (4.73)$$

Il est donc impossible que des valeurs propres de la matrice H'_γ apparaissent sur l'axe des imaginaires purs négatifs \mathbb{C}_0^- . Le fait que le théorème 4.3.4 teste tout l'axe imaginaire n'introduit donc pas de pessimisme.

Dans le cas où $0 < \nu < 1$, les valeurs propres des matrices A , H_γ et H'_γ sont représentées sur la figure 4.4 lorsque $\|T_{zw}\|_{H_\infty} < \gamma$ et sur la figure 4.5 lorsque $\|T_{zw}\|_{H_\infty} > \gamma$. Comme dans le cas précédent, les valeurs propres de la matrice A appartiennent aussi au domaine de stabilité. Par contre, les valeurs propres de la matrice H_γ peuvent apparaître dans tout le plan complexe (cf. figure 4.4.b). De ce fait, H'_γ peut avoir des valeurs propres sur l'axe des imaginaires purs négatifs \mathbb{C}_0^- alors que $\|T_{zw}\|_{H_\infty} < \gamma$ (ce cas particulier est illustré sur la figure 4.4.c). Ainsi, une absence de solution à la LMI (4.63) du théorème 4.3.4 ne permet donc pas d'affirmer que γ n'est pas un majorant de $\|T_{zw}\|_{H_\infty}$.

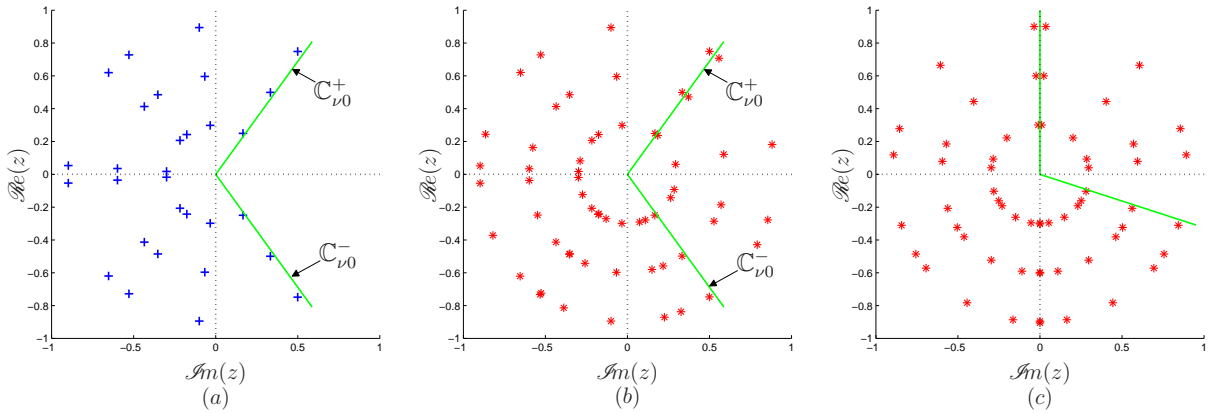


FIGURE 4.4 – Valeurs propres des matrices A (a), H_γ (b) et H'_γ (c) pour $\nu = 0.6$ et $\|T_{zw}\|_{H_\infty} < \gamma$

Le terme γ^2 apparaissant de manière linéaire dans la LMI (4.63), le théorème 4.3.4 peut être modifié pour faire apparaître un problème d'optimisation conduisant à $\|T_{zw}\|_{H_\infty}$,

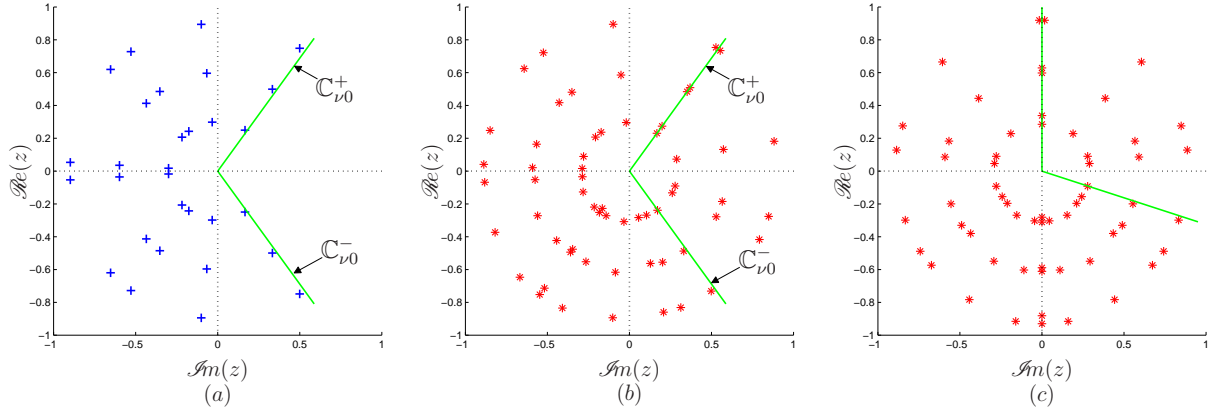


FIGURE 4.5 – Valeurs propres des matrices A (a), H_γ (b) et H'_γ (c) pour $\nu = 0.6$ et $\|T_{zw}\|_{H_\infty} > \gamma$

comme indiqué sur le théorème qui suit.

Théorème 4.3.6 *Soient une pseudo représentation d'état stable de la forme (4.26) et le problème d'optimisation convexe suivant :*

$$\gamma_{opt} = \min_{X=X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}} \gamma, \quad (4.74)$$

contraint par la LMI

$$\begin{bmatrix} \bar{r}A^T X + XrA & XB_w & \bar{r}C_z^T \\ B_w^T X & -\gamma I & D_{zw}^T \\ rC_z & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.75)$$

où $r = e^{(1-\nu)j\frac{\pi}{2}}$.

Cas 1 Si $1 < \nu < 2$ alors $\|T_{zw}\|_{H_\infty} = \sqrt{\gamma_{opt}}$.

Cas 2 Si $0 < \nu < 1$ alors $\|T_{zw}\|_{H_\infty} \leq \sqrt{\gamma_{opt}}$. ■

Pour un ordre non entier commensurable ν compris entre 1 et 2, le théorème 4.3.6 fait apparaître que la minimisation du scalaire γ de la LMI (4.75) conduit à la norme H_∞ de T_{zw} . Par contre, lorsque ν est compris entre 0 et 1, le pessimisme du théorème 4.3.4, qui a été discuté en détails précédemment, conduit à un simple majorant de $\|T_{zw}\|_{H_\infty}$.

Le théorème 4.3.6 permet de calculer la norme H_∞ du système si sa stabilité a été vérifiée dans un premier temps. Comme nous allons le montrer par la suite, ce théorème

peut être modifié pour évaluer simultanément la stabilité. Pour ce faire, il suffit de remarquer que la faisabilité de la LMI (4.75) implique qu'il existe $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tel que :

$$\bar{r}A^T X + XrA < 0. \quad (4.76)$$

Or la LMI (4.76) est similaire à l'inégalité (4.6) permettant de tester la stabilité d'un modèle entier en étudiant la position des valeurs propres de sa matrice d'état. Le modèle n'est stable que si ses valeurs propres sont localisées dans le demi-plan complexe gauche. Par analogie, pour un modèle non entier de pseudo matrice d'état A , l'inégalité (4.76) permet donc de vérifier si les valeurs propres de la matrice complexe $rA = e^{(1-\nu)j\frac{\pi}{2}}A$ sont dans le demi-plan complexe gauche. Les figure 4.6 et 4.7 représentent les valeurs propres de matrices A et rA choisies aléatoirement et correspondant à des modèles non entiers commensurables stables d'ordre $1 < \nu < 2$ et d'ordre $0 < \nu < 1$.

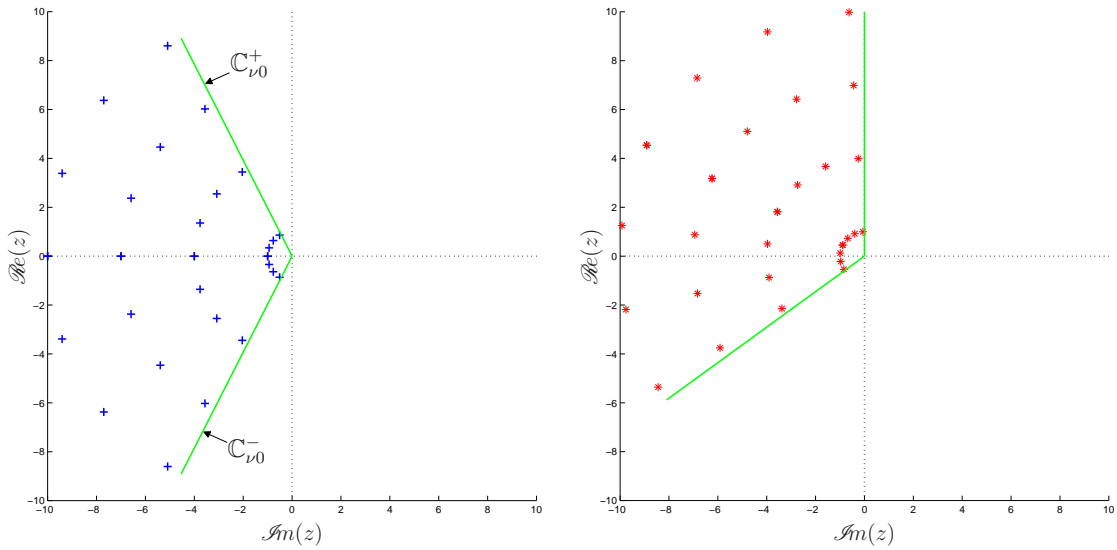


FIGURE 4.6 – Valeurs propres des matrices A (+) et rA (*) pour $1 < \nu < 2$

Les valeurs propres de la matrice rA sont issues de la rotation des valeurs propres de la matrice A d'un angle $\theta = (1 - \nu)\frac{\pi}{2}$. Lorsque $1 < \nu < 2$, les valeurs propres de rA appartiennent toutes au demi-plan gauche du plan complexe si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes dans le domaine de stabilité $\mathcal{D}_s = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| > \nu\frac{\pi}{2}\}$. Par contre, lorsque $0 < \nu < 1$, rA peut très bien avoir des valeurs propres dans le demi-plan

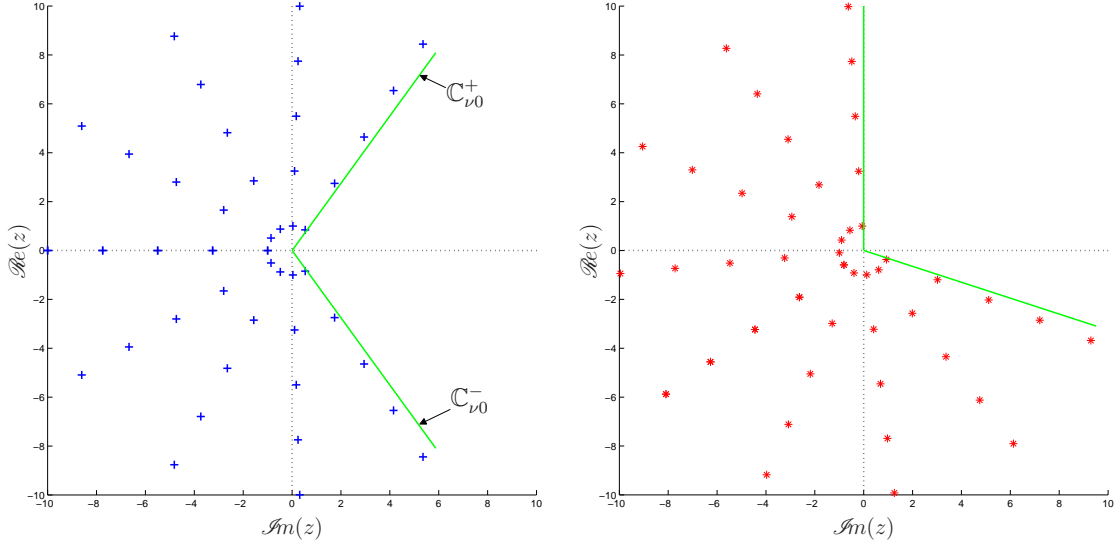


FIGURE 4.7 – Valeurs propres des matrices A (+) et rA (*) pour $0 < \nu < 1$

droit alors que toutes celles de A appartiennent à \mathcal{D}_s . On peut donc écrire le théorème suivant.

Théorème 4.3.7 *Soit une pseudo représentation d'état de la forme (4.26). Soient également $\gamma > \bar{\sigma}(D_{zw})$ un réel positif et l'inégalité suivante :*

$$\begin{bmatrix} \bar{r}A^T X + XrA & XB_w & \bar{r}C_z^T \\ B_w^T X & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ rC_z & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.77)$$

avec $r = e^{(1-\nu)j\frac{\pi}{2}}$.

Cas 1 ($1 < \nu < 2$) : *Le système est stable et $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} < \gamma$ si et seulement s'il existe une matrice $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n} > 0$ telle que (4.77).*

Cas 2 ($0 < \nu < 1$) : *S'il existe $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n} > 0$ telle que (4.77) alors le système est stable et $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} < \gamma$. ■*

Le théorème 4.3.7 offre une condition LMI permettant de calculer la norme H_∞ de T_{zw} sans avoir à vérifier a priori sa stabilité contrairement au théorème 4.3.4. Pour $1 < \nu < 2$, la condition LMI (4.77) est nécessaire et suffisante. Pour $0 < \nu < 1$, elle n'est

que suffisante et même très pessimiste. En effet, l'analyse du lieu des valeurs propres des matrices A et rA représenté sur les figures 4.6 et 4.7 montre que la LMI (4.77) n'admet de solution que si toutes les valeurs propres de la matrice rA sont dans le demi-plan complexe gauche, ce qui pour $0 < \nu < 1$, n'est possible que si les valeurs propres de la matrice A sont telles que :

$$|\arg(\text{eig}(A))| > \pi - \frac{\nu\pi}{2}. \quad (4.78)$$

L'avantage du théorème 4.3.7 est de proposer un critère très semblable au lemme borné réel qui a pour avantage de pouvoir être étendu au problème de synthèse d'un correcteur stabilisant. Mais comme tous les théorèmes précédents, il est pessimiste pour des ordres non entiers tels que $0 < \nu < 1$. Dans le paragraphe suivant, le formalisme des régions GLMI permet d'obtenir une condition LMI nécessaire et suffisante pour $0 < \nu < 1$ comme pour $1 < \nu < 2$.

4.3.1.3 – Formulations LMI basées sur l'utilisation des régions GLMI

Il a été précédemment mentionné que la norme H_∞ du modèle stable $T_{zw}(s)$, dont une pseudo représentation d'état est donnée par (4.26), est bornée par le scalaire γ si et seulement si la matrice H_γ n'a aucune valeur propre sur $\mathbb{C}_{\nu 0} = \{(j\omega)^\nu = |\omega|^\nu e^{j\frac{\pi}{2}\text{sign}(\omega)\nu}, \omega \in \mathbb{R}\}$. $\mathbb{C}_{\nu 0}$ peut être décomposé en deux demi-droites $\mathbb{C}_{\nu 0}^+ = \{(j\omega)^\nu, \omega \in \mathbb{R}^+\}$ et $\mathbb{C}_{\nu 0}^- = \{(j\omega)^\nu, \omega \in \mathbb{R}^-\}$. L'ensemble \mathbb{C} privé de $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$, noté $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^+$, apparaît comme l'union de trois demi-plans, notés \mathcal{D}_{s1} , \mathcal{D}_{s2} et \mathcal{D}_{s3} . Les demi-plans \mathcal{D}_{s1} et \mathcal{D}_{s2} s'obtiennent respectivement par rotation du demi-plan gauche d'un angle $\varphi_1 = (\nu - 1)\frac{\pi}{2}$ et $\varphi_2 = (1 + \nu)\frac{\pi}{2}$ selon les notations. \mathcal{D}_{s3} correspond au demi-plan droit pour $1 < \nu < 2$, soit $\varphi_3 = \pi$ comme on peut le voir sur la figure 4.8.

Pour $0 < \nu < 1$, \mathcal{D}_{s3} correspond au demi-plan gauche, soit $\varphi_3 = 0$. On a donc :

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^+ = \mathcal{D}_{s1} \cup \mathcal{D}_{s2} \cup \mathcal{D}_{s3}. \quad (4.79)$$

De même, l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^-$ est l'union de \mathcal{D}_{s4} , \mathcal{D}_{s5} et \mathcal{D}_{s3} avec $\varphi_4 = -\varphi_1$ et $\varphi_5 = -\varphi_2$ comme présenté sur la figure 4.8, soit :

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^- = \mathcal{D}_{s4} \cup \mathcal{D}_{s5} \cup \mathcal{D}_{s3}. \quad (4.80)$$

Par conséquent, montrer d'abord que les valeurs propres de H_γ sont toutes dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^+$ puis dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^-$ équivaut à montrer que $\|T_{zw}\|_{H_\infty} < \gamma$.

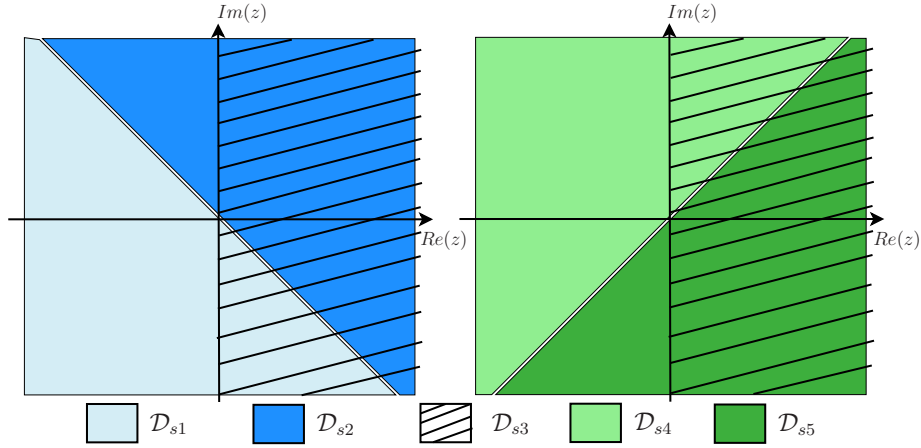


FIGURE 4.8 – $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^+$ (gauche) et $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^-$ (droite) vu comme l'union de trois demi-plans pour $1 < \nu < 2$

Sachant que tous les domaines $\mathcal{D}_{si} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(ze^{-j\varphi_i}) < 0\}$, $\forall i \in \{1 \dots 5\}$ s'écrivent aussi

$$\mathcal{D}_{si} = \{z \in \mathbb{C} : \exists w_i \in \mathbb{R}^+ \text{ tels que } e^{-j\varphi_i}zw_i + e^{j\varphi_i}\bar{z}\bar{w}_i < 0\}, \quad (4.81)$$

ce sont des régions GLMI de la forme (4.15) avec $m = 1$, $\theta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\psi_1 = \begin{bmatrix} e^{-j\varphi_i} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $H_1 = 1$ et $J_1 = -1$.

Dans [Bachelier, 1998], il est montré que l'union de m régions GLMI notées

$$\mathcal{D}_k = \{z \in \mathbb{C} : f_k(z) = \alpha_k + \beta_k z + \beta_k^* \bar{z} < 0\} \quad , \quad \forall k \in \{1 \dots m\}, \quad (4.82)$$

est une région GLMI de la forme (4.15), d'ordre $l = m + 1$ et

$$\theta_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Theta_k & \mathbf{0}_{1 \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & -\varepsilon_k^m \end{bmatrix}, \quad (4.83)$$

$$\psi_k = \begin{bmatrix} \Psi_k & \mathbf{0}_{1 \times m} \\ \mathbf{0}_{m \times 1} & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \quad ; \quad H_k = -J_k = \varepsilon_{k+1}^{m+1}, \quad (4.84)$$

où ε_i^j sont des matrices carrées de taille j définies par : $\varepsilon_i^j(\rho, \sigma) = 1$ si $\rho = \sigma = i$, et par $\varepsilon_i^j(\rho, \sigma) = 0$ sinon, et :

$$\Theta_k = \begin{bmatrix} \alpha_k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \Psi_k = \begin{bmatrix} \beta_k & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}. \quad (4.85)$$

Chacune des régions \mathcal{D}_{si} peut être décrite par la relation (4.82) avec $\alpha_k = 0$ et $\beta_k = e^{-j\varphi_k}$. Les domaines $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^+$ et $\mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^-$ sont donc des régions GLMI de la forme (4.15).

En étendant la définition de la \mathcal{D} -stabilité aux régions GLMI grâce au lemme 4.2.11 [Chilali, 1996] avec $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^+$ puis $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{C}_{\nu 0}^-$, on obtient le théorème suivant.

Théorème 4.3.8 *Soit $\gamma > \bar{\sigma}(D_{zw})$ un réel positif. La norme H_∞ du modèle non entier commensurable stable $T_{zw}(s)$, de pseudo représentation d'état (4.26), est bornée par γ si et seulement s'il existe $X_1 = X_1^*$, $X_2 = X_2^*$ et $X_3 = X_3^* \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ telles que :*

$$r_1 H_\gamma X_1 + \bar{r}_1 X_1 H_\gamma^* + r_2 H_\gamma X_2 + \bar{r}_2 X_2 H_\gamma^* - \text{sgn}(\nu-1) H_\gamma X_3 - \text{sgn}(\nu-1) X_3 H_\gamma^* < 0 \quad (4.86)$$

et $X_4 = X_4^*$, $X_5 = X_5^*$ et $X_6 = X_6^* \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$ telles que

$$\bar{r}_1 H_\gamma X_4 + r_1 X_4 H_\gamma^* + \bar{r}_2 H_\gamma X_5 + r_2 X_5 H_\gamma^* - \text{sgn}(\nu-1) H_\gamma X_6 - \text{sgn}(\nu-1) X_6 H_\gamma^* < 0 \quad (4.87)$$

où $r_1 = e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}}$, $r_2 = e^{-j(1+\nu)\frac{\pi}{2}}$, la matrice H_γ étant définie par (4.35). ■

Dans le théorème 4.3.8, deux LMI faisant chacune intervenir trois variables matricielles sont utilisées. La LMI (4.86) permet de vérifier que H_γ n'a aucune valeur propre sur $\mathbb{C}_{\nu 0}^+$ tandis que la LMI (4.87) permet de vérifier que H_γ n'a aucune valeur propre sur $\mathbb{C}_{\nu 0}^-$. Bien qu'il nécessite plus de variables matricielles que les théorèmes précédents, le théorème 4.3.8 a l'avantage de tester directement $\mathbb{C}_{\nu 0}$, ce qui enlève le pessimisme dû aux transformations de la matrice H_γ . Il fournit donc une condition nécessaire et suffisante quel que soit l'ordre commensurable ν .

Bien que les LMI (4.86) et (4.87) permettent d'évaluer efficacement la norme H_∞ d'un système non entier commensurable stable, leur extension au problème de synthèse est délicate pour les raisons suivantes :

- elles font apparaître des variables complexes alors que les paramètres d'un correcteur sont réels ;
- plusieurs variables sont utilisées alors qu'un seul correcteur doit être calculé ;
- ces conditions n'assureront pas la stabilité du système bouclé.

4.3.2 – Méthodes basées sur l'utilisation du lemme KYP généralisé

Les méthodes proposées dans ce paragraphe font suite aux travaux de [Liang *et al.*, 2013]. Elles font appel au lemme de Kalman-Yakubovič-Popov (KYP) généralisé [Iwasaki et Hara, 2005] pour caractériser le domaine $\mathbb{C}_{\nu 0}$.

Deux méthodes sont proposées. Dans la première, la norme H_∞ est calculée en utilisant la définition de la norme L_∞ d'un modèle stable. Dans la seconde méthode, la définition de la norme H_∞ est utilisée.

4.3.2.1 – Méthode basée sur la définition de la norme L_∞

Dans cette première partie, la définition de la norme L_∞ est utilisée. Les résultats développés ici ne s'appliquent donc qu'à des systèmes dont la stabilité a été vérifiée a priori.

Commençons par rappeler le lemme de Kalman-Yakubovič-Popov (KYP). Soit \mathbb{H}_n l'ensemble des matrices hermitiennes de dimension n .

Lemme 4.3.9 (Kalman-Yakubovič-Popov (KYP) [Iwasaki et Hara, 2005])

Soient les matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $\Theta \in \mathbb{H}_{n_u}$, $\Phi \in \mathbb{H}_2$ et $\Psi \in \mathbb{H}_2$. Soit l'ensemble Λ défini par

$$\Lambda(\Phi, \Psi) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \right\}. \quad (4.88)$$

Considérons les hypothèses suivantes :

1. si $H(\lambda) = (\lambda I_n - A)^{-1} B$, alors

$$\begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda ; \quad (4.89)$$

2. il existe $P, Q \in \mathbb{H}_n$, $Q > 0$ telles que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{bmatrix} + \Theta < 0. \quad (4.90)$$

(2) \Rightarrow (1) est toujours vrai. Si de plus, Λ représente une courbe dans le plan complexe, alors (2) \Leftrightarrow (1). ■

Avant d'utiliser le lemme 4.3.9, montrons que la définition 2.3.1 peut être limitée aux fréquences positives, soit :

$$\|T_{zw}(s)\|_{L_\infty} = \sup_{\omega \geq 0} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega)). \quad (4.91)$$

Sachant qu'une matrice et sa transconjuguée ont les mêmes valeurs propres, on peut écrire :

$$\bar{\sigma}(T_{zw}(s)) = \bar{\sigma}(T_{zw}^*(s)) \quad , \quad \forall s \in \mathbb{C}. \quad (4.92)$$

De plus $T_{zw}^*(s) = T_{zw}(s^*)$ car $T_{zw}(s)$ est une matrice de transfert à coefficients réels. Ainsi :

$$\sup_{\omega \geq 0} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega)) = \sup_{\omega \geq 0} \bar{\sigma}(T_{zw}(-j\omega)) = \sup_{\omega \leq 0} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega)) \quad (4.93)$$

ce qui implique que :

$$\sup_{\omega \geq 0} \bar{\sigma}(T_{zw}(j\omega)) = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(T_{zw}(-j\omega)) = \|T_{zw}(s)\|_{L_\infty}. \quad (4.94)$$

Selon l'équation (4.91), on a :

$$\|T_{zw}(s)\|_{L_\infty} = \sup_{\omega \geq 0} [C_z (\lambda(\omega)I - A)^{-1} B_w + D_{zw}] \quad (4.95)$$

avec $\lambda(\omega) = e^{j\nu\frac{\pi}{2}}\omega^\nu$, $\omega \geq 0$. $\lambda(\omega)$ est une demi-droite du plan complexe, pouvant aussi être représentée par un ensemble Λ défini comme dans la relation (4.88) avec $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & e^{j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix}$

et $\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 - \nu \\ 1 - \nu & 0 \end{bmatrix}$. On a aussi :

$$\begin{aligned} \|T_{zw}(s)\|_{L_\infty} < \gamma &\Leftrightarrow T_{zw}(j\omega)T_{zw}^*(j\omega) - \gamma^2 I < 0, \quad \forall \omega \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda \end{aligned} \quad (4.96)$$

où $H(\lambda) = (\lambda I_n - A^T)^{-1} C_z^T$ et $\Theta = \begin{bmatrix} B_w B_w^T & B_w D_{zw}^T \\ D_{zw} B_w^T & D_{zw} D_{zw}^T - \gamma^2 I_n \end{bmatrix}$. D'après le lemme 4.3.9, la relation (4.96) est équivalente à : $\exists P, Q \in \mathbf{H}_n$, $Q > 0$ telles que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A^T & C_z^T \\ I_n & 0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} 0 & e^{j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \otimes P + \begin{bmatrix} 0 & 1 - \nu \\ 1 - \nu & 0 \end{bmatrix} \otimes Q \right) \begin{bmatrix} A^T & C_z^T \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} B_w B_w^T & B_w D_{zw}^T \\ D_{zw} B_w^T & D_{zw} D_{zw}^T - \gamma^2 I_n \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (4.97)$$

qui peut aussi s'écrire

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \{ A (e^{j\theta} P + (1 - \nu)Q) \} & (C_z (e^{j\theta} P + (1 - \nu)Q))^* \\ C_z (e^{j\theta} P + (1 - \nu)Q) & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_w \\ D_{zw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w \\ D_{zw} \end{bmatrix}^T < 0. \quad (4.98)$$

En utilisant le complément de Schur, (4.98) devient :

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \{A(e^{j\theta}P + (1-\nu)Q)\} & * & * \\ C_z(e^{j\theta}P + (1-\nu)Q) & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.99)$$

La LMI (4.99) permet d'évaluer la norme L_∞ de la matrice de transfert $T_{zw}(s)$ quel que soit l'ordre commensurable ($0 < \nu < 1$ ou $1 < \nu < 2$). Il est toutefois possible d'améliorer cette LMI issue de [Liang et al., 2013] en prenant en compte le théorème 4.3.4. En effet, deux variables matricielles P et Q sont requises dans la LMI (4.99). Or la démonstration du théorème 4.3.4 prouve que pour $1 < \nu < 2$, on peut prendre $Q = 0$ sans rajouter de pessimisme. En partant de [Liang et al., 2013], le théorème suivant est obtenu.

Théorème 4.3.10 *Soit $\gamma > \bar{\sigma}(D_{zw})$ un réel positif. Alors la norme H_∞ du modèle stable T_{zw} est bornée par γ si et seulement si les conditions LMI suivantes sont vérifiées.*

Cas 1 ($1 < \nu < 2$) : $\exists P \in \mathbb{H}_n$ telle que

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \{Ae^{j\theta}P\} & * & * \\ C_z e^{j\theta}P & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.100)$$

avec $\theta = \frac{\pi}{2}(1 - \nu)$.

Cas 2 ($0 < \nu < 1$) : $\exists P, Q \in \mathbb{H}_n, Q > 0$ telles que

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \{A(e^{j\theta}P + (1-\nu)Q)\} & * & * \\ C_z(e^{j\theta}P + (1-\nu)Q) & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.101)$$

avec $\theta = \frac{\pi}{2}(1 - \nu)$. ■

Le théorème 4.3.10 fournit une condition nécessaire et suffisante permettant de vérifier que $\|T_{zw}\|_{H_\infty} < \gamma$ pour $1 < \nu < 2$ et pour $0 < \nu < 1$. Comme le terme γ apparait de manière linéaire dans les LMI (4.100) et (4.101), il peut être minimisé afin de calculer $\|T_{zw}\|_{H_\infty}$.

Théorème 4.3.11 *Soit T_{zw} un transfert non entier commensurable stable associé à la pseudo représentation d'état (4.26).*

Cas 1 ($1 < \nu < 2$) : soit le problème d'optimisation convexe

$$\gamma_{opt} = \min_{P \in \mathbb{H}_n} \gamma \quad (4.102)$$

contraint par la LMI

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \{ A e^{j\theta} P \} & * & * \\ C_z e^{j\theta} P & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.103)$$

avec $\theta = \frac{\pi}{2}(1 - \nu)$.

Alors $\|T_{zw}\|_{H_\infty} = \gamma_{opt}$.

Cas 2 ($0 < \nu < 1$) : soit le problème d'optimisation convexe

$$\gamma_{opt} = \min_{P, Q \in \mathbb{H}_n, Q > 0} \gamma \quad (4.104)$$

contraint par la LMI

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \{ A (e^{j\theta} P + (1 - \nu)Q) \} & * & * \\ C_z (e^{j\theta} P + (1 - \nu)Q) & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.105)$$

avec $\theta = \frac{\pi}{2}(1 - \nu)$.

Alors $\|T_{zw}\|_{H_\infty} = \gamma_{opt}$. ■

4.3.2.2 – Méthodes basées sur la définition de la norme H_∞

Les conditions LMI précédentes nécessitent de vérifier la stabilité du modèle avant d'être utilisées car elles sont basées sur la définition de la norme L_∞ . Nous présentons maintenant une méthode de calcul de la norme H_∞ toujours inspirée de [Liang *et al.*, 2013] et utilisant une version modifiée du lemme KYP généralisé.

Lemme 4.3.12 ([Liang *et al.*, 2013]) *Si l'ensemble $\Lambda(\Phi, \Psi)$ du lemme 4.3.9 est remplacé par l'ensemble $\Upsilon(\Phi, \Psi)$ défini par*

$$\Upsilon(\Phi, \Psi) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \right\} \quad (4.106)$$

alors la condition (4.89) est vraie $\forall \lambda \in \Upsilon$ s'il existe des matrices $P, Q > 0$ vérifiant la condition LMI (4.90). ■

La preuve du lemme 4.3.12 est donnée en annexe B. Ce lemme, moins contraignant que le lemme (4.3.9), ne fournit qu'une condition suffisante permettant de passer de (4.90) à (4.89). Le théorème suivant, issu de [Liang *et al.*, 2013] et dérivé du lemme 4.3.12, permet d'évaluer la norme H_∞ d'un système non entier d'ordre ν .

Théorème 4.3.13 ([Liang *et al.*, 2013]) *Soient le triplet minimal $(A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}, C \in \mathbb{R}^{n_u \times n})$, $D \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}$, $\gamma > 0$ et la matrice de transfert $G(s) = C(s^\nu I - A)^{-1}B + D$. Alors $\|G(s)\|_{H_\infty} < \gamma$ si les conditions LMI suivantes sont vérifiées.*

Cas 1 ($1 < \nu < 2$) : $\exists P \in \mathbb{H}_n$, $P > 0$ telle que

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}\{Ae^{j\theta}P\} & * & * \\ Ce^{j\theta}P & -\gamma I & * \\ B^T & D^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.107)$$

Cas 2 ($0 < \nu < 1$) : $\exists P, Q \in \mathbb{H}_n$, $P, Q > 0$ telles que

$$\begin{bmatrix} \text{Sym}\{A(e^{j\theta}P + e^{-j\theta}Q)\} & * & * \\ C(e^{j\theta}P + e^{-j\theta}Q) & -\gamma I & * \\ B^T & D^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.108)$$

De plus, dans le 1^{er} cas, la condition LMI (4.107) est aussi nécessaire. ■

Preuve

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_{H_\infty} &= \sup_{\text{Re}(s) \geq 0} \bar{\sigma}(G(s)) \\ &= \sup_{\text{Re}(s) \geq 0} [C(s^\nu I - A)^{-1}B + D] \end{aligned} \quad (4.109)$$

L'ensemble $\{s^\nu : \text{Re}(s) \geq 0\}$ peut être représenté par $\Lambda\left(0, \begin{bmatrix} 0 & e^{j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix}\right)$ comme dans la relation (4.88) quand $1 < \nu < 2$ et par $\Upsilon\left(\begin{bmatrix} 0 & e^{j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\theta} \\ e^{j\theta} & 0 \end{bmatrix}\right)$ comme dans la relation (4.106) quand $0 < \nu < 1$. La preuve de suffisance du théorème 4.3.13 est similaire aux développements du paragraphe 4.3.2.1 en utilisant le lemme 4.3.9 pour $1 < \nu < 2$ et le lemme 4.3.12 pour $0 < \nu < 1$.

Pour montrer la nécessité du théorème 4.3.13 quand $1 < \nu < 2$, on suppose que $\|G(s)\|_{H_\infty} < \gamma$ et on considère la courbe $\Lambda_1\left(\begin{bmatrix} 0 & e^{j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix}, 0\right)$. Comme $\Lambda_1 \subset \{s^\nu : \text{Re}(s) \geq 0\}$, on a :

$$\begin{aligned}\gamma > \|G(s)\|_{H_\infty} &= \sup_{\operatorname{Re}(s) \geq 0} [C(s^\nu I - A)^{-1}B + D] \\ &\geq \sup_{\lambda \in \Lambda_1} [C(\lambda I - A)^{-1}B + D].\end{aligned}\quad (4.110)$$

Selon le lemme 4.3.9, $\exists P \in \mathbb{H}_n$ telle que :

$$\begin{bmatrix} A^T & C^T \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} 0 & e^{j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \otimes P \right) \begin{bmatrix} A^T & C^T \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BB^T & BD^T \\ DB^T & DD^T - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.111)$$

En utilisant le complément de Schur, (4.111) est équivalente à (4.107).

Comme $\operatorname{Sym}\{e^{j\theta}AP\} < 0$, on pose $\operatorname{Sym}\{e^{j\theta}AP\} = -M$, $M > 0$ et $\tilde{A} = e^{j\theta}A$. Etant donné que $\|G(s)\|_{H_\infty} < \gamma$, le système $G(s)$ est stable, i.e. les valeurs propres de A sont dans l'ensemble $\{s : |\arg(s)| > \nu \frac{\pi}{2}\}$. Les valeurs propres de \tilde{A} sont donc toutes dans le demi-plan gauche du plan complexe. Comme $\operatorname{Sym}\{\tilde{A}P\} = -M$, on peut en déduire que $P = \int_0^{+\infty} e^{\tilde{A}t} M e^{\tilde{A}^*t} dt > 0$, ce qui prouve que la condition LMI (4.107) est nécessaire pour $1 < \nu < 2$. ■

Comme précédemment, le théorème 4.3.13 a pu être amélioré en réduisant le nombre de variables matricielles nécessaires quand $0 < \nu < 1$, ce qui permet d'aboutir au théorème suivant.

Théorème 4.3.14 Soient T_{zw} un transfert non entier commensurable associé à la pseudo représentation d'état (4.26) et $\gamma > \bar{\sigma}(D_{zw})$ un réel positif.

Cas 1 ($1 < \nu < 2$) : T_{zw} est stable et $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} < \gamma$ si et seulement si $\exists P \in \mathbb{H}_n > 0$ telle que

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Sym}\{Ae^{j\theta}P\} & * & * \\ C_z e^{j\theta}P & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.112)$$

avec $\theta = \frac{\pi}{2}(1 - \nu)$.

Cas 2 ($0 < \nu < 1$) : Si $\exists X, \mathbb{H}_n > 0$ telle que

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Sym}\{A(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\overline{X})\} & * & * \\ C_z(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\overline{X}) & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.113)$$

avec $\theta = \frac{\pi}{2}(1 - \nu)$, alors T_{zw} est stable et $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} < \gamma$. ■

Preuve *Le premier cas est identique à celui du théorème 4.3.13. Mais dans le second cas, la LMI (4.108) du théorème 4.3.13 nécessitait deux variables P and Q alors qu'une seule variable X est utilisée dans la LMI (4.113) du théorème 4.3.14. Montrons que ces deux conditions sont équivalentes. Pour ce faire, on note :*

$$L_1(P) = \begin{bmatrix} \text{Sym} \{e^{j\theta} AP\} & * & * \\ e^{j\theta} C_z P & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

et

$$L_2(Q) = \begin{bmatrix} \text{Sym} \{e^{-j\theta} AQ\} & * & * \\ e^{-j\theta} C_z Q & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.115)$$

La LMI (4.108) peut donc s'écrire

$$L_1(P) + L_2(Q) < 0 \quad (4.116)$$

tandis que la LMI (4.113) devient

$$L_1(X) + L_2(\overline{X}) < 0. \quad (4.117)$$

On veut donc montrer que

$$\exists P > 0, Q > 0 \quad \text{telles que} \quad L_1(P) + L_2(Q) < 0 \quad (4.118)$$

est équivalente à :

$$\exists X > 0 \quad \text{telle que} \quad L_1(X) + L_2(\overline{X}) < 0. \quad (4.119)$$

L'implication (4.119) \Rightarrow (4.118) est évidente en prenant $Q = \overline{P}$.

La preuve pour l'implication (4.118) \Rightarrow (4.119) est la suivante :

$$\exists P, Q \in \mathbb{H}_n > 0 \quad \text{telles que} \quad L_1(P) + L_2(Q) < 0 \quad (4.120)$$

équivalent à

$$\exists P, Q \in \mathbb{H}_n > 0 \quad \text{telles que} \quad \overline{L_1(P) + L_2(Q)} < 0. \quad (4.121)$$

Cela implique que :

$$\exists P, Q \in \mathbb{H}_n > 0 \quad \text{telles que} \quad L_1(P) + L_2(Q) + \overline{L_1(P) + L_2(Q)} < 0 \quad (4.122)$$

qui peut encore s'écrire

$$\exists P, Q \in \mathbb{H}_n > 0 \text{ telles que } L_1(P) + L_2(Q) + L_1(\overline{Q}) + L_2(\overline{P}) < 0. \quad (4.123)$$

Cette dernière relation peut s'écrire

$$\exists P, Q \in \mathbb{H}_n > 0 \text{ telles que } L_1(P + \overline{Q}) + L_2(\overline{P} + Q) < 0 \quad (4.124)$$

équivalente au second cas du théorème 4.3.14 en prenant $X = P + \overline{Q}$. ■

Remarquons que dans le cas $0 < \nu < 1$, le théorème 4.3.14 a deux fois moins de variables que le théorème 4.3.13 et l'inégalité (4.113) devient réelle, ce qui est un avantage pour la synthèse de correcteurs. En outre, pour $1 < \nu < 2$, la LMI (4.112) est identique à la LMI (4.100) du théorème 4.3.10 qui est basé sur la définition de la norme L_∞ , à la seule différence que la variable matricielle P est définie positive dans l'inégalité (4.112). C'est cette contrainte qui permet de garantir la stabilité et d'aboutir directement à la norme H_∞ . Par contre, lorsque $0 < \nu < 1$, la stabilité est assurée par la définie positivité de la matrice $(e^{j\theta}X + e^{-j\theta}\overline{X})$. En outre, la condition LMI (4.113) est seulement suffisante car elle découle du lemme 4.3.12, qui comme dit précédemment, n'offre qu'une condition suffisante.

Comme pour le théorème 4.3.10, le scalaire γ apparaît de manière linéaire dans les LMI (4.112) et (4.113). Il peut donc être minimisé pour le calcul direct de la norme H_∞ en utilisant le théorème suivant.

Théorème 4.3.15 Soit T_{zw} un transfert non entier commensurable stable de pseudo représentation d'état (4.26).

Cas 1 ($1 < \nu < 2$) : soit le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\gamma_{opt} = \min_{P \in \mathbb{H}_n > 0} \gamma \quad (4.125)$$

contraint par la LMI

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \{ Ae^{j\theta}P \} & * & * \\ C_z e^{j\theta}P & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.126)$$

avec $\theta = \frac{\pi}{2}(1 - \nu)$.

Alors $\|T_{zw}\|_{H_\infty} = \gamma_{opt}$.

Cas 2 ($0 < \nu < 1$) : soit le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\gamma_{opt} = \min_{X \in \mathbb{H}_n > 0} \gamma \quad (4.127)$$

contraint par la LMI

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \{ A (e^{j\theta} X + e^{-j\theta} \overline{X}) \} & * & * \\ C_z (e^{j\theta} X + e^{-j\theta} \overline{X}) & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.128)$$

avec $\theta = \frac{\pi}{2}(1 - \nu)$.

Alors $\|T_{zw}\|_{H_\infty} \leq \gamma_{opt}$. ■

4.3.3 – Comparaison des conditions LMI proposées

Plusieurs conditions LMI permettant le calcul de la norme H_∞ d'un modèle non entier ont été présentées dans les paragraphes précédents. Ces conditions, basées soit sur la pseudo matrice hamiltonienne H_γ , soit sur le lemme de KYP, présentent des degrés de pessimisme différents. En outre, certaines ne peuvent être appliquées qu'à des modèles non entiers stables. Afin d'avoir une vision synthétique des conditions LMI d'analyse de la norme H_∞ proposées dans cette partie, un tableau récapitulatif est proposé. Les théorèmes précédents y seront classés selon le degré de pessimisme pour un ordre ν et le fait qu'ils permettent ou non de tester la stabilité.

Méthodes	Résultats	Stabilité testée		Stabilité non testée	
		$0 < \nu < 1$	$1 < \nu < 2$	$0 < \nu < 1$	$1 < \nu < 2$
basées sur la pseudo matrice Hamiltonienne	Théorème 4.3.4	CS (★★)	CNS	X	X
	Théorème 4.3.7	CS (★★★)	CNS	CS (★★★)	CNS
	Théorème 4.3.8	CNS	CNS	X	X
basées sur le lemme de KYP	Théorème 4.3.10	CNS	CNS	X	X
	Théorème 4.3.13	CS (★)	CNS	CS (★★)	CNS
	Théorème 4.3.14	CS (★)	CNS	CS (★★)	CNS

TABLE 4.1 – Comparaison des conditions LMI pour la norme H_∞

Le tableau 4.1 précise si les conditions LMI d'analyse de la norme H_∞ sont des conditions nécessaires et suffisantes (CNS) ou seulement des conditions suffisantes (CS). De plus, le pessimisme des méthodes est évalué qualitativement par le nombre d'étoiles :

- (★) : peu pessimiste ;
- (★★) : moyennement pessimiste ;

— (★★★) : très pessimiste.

La tendance générale qui se dégage du tableau 4.1 est que les conditions LMI proposées sont toujours nécessaires et suffisantes pour $1 < \nu < 2$. Cela est principalement dû à la convexité du domaine de stabilité, entièrement inclus dans le demi-plan complexe gauche. Seuls le théorème 4.3.8, basé sur le formalisme des régions GLMI, et les théorèmes basés sur le lemme de KYP, permettent d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour des modèles stables lorsque $0 < \nu < 1$. Par ailleurs, les conditions LMI permettant à la fois de tester la stabilité et de calculer la norme H_∞ sont généralement plus pessimistes. Au pessimisme dû à la non convexité du domaine de stabilité pour $0 < \nu < 1$ s'ajoutent, en effet, soit le pessimisme dû à la position des valeurs propres de la pseudo matrice hamiltonienne, soit le pessimisme dû au fait que le lemme 4.3.12 n'offre qu'une condition suffisante.

Afin d'illustrer ces conjectures sur le pessimisme des méthodes proposées, les bornes supérieures obtenues à l'aide des différents théorèmes sont calculées sur des exemples dans la partie 4.3.4.

4.3.4 – Exemples

Les exemples ci-dessous ont pour but de montrer des utilisations possibles des conditions LMI précédemment décrites pour le calcul de la norme H_∞ des modèles non entiers et d'évaluer leur pessimisme. Le premier système étudié est un système thermique admettant un modèle non entier d'ordre 0.5. Le second système est une suspension automobile de type CRONE qui, associée à la caisse du véhicule, génère un modèle d'ordre 1.5.

4.3.4.1 – Exemple 1 : détermination du gain maximal ($0 < \nu < 1$)

Soit un système thermique composé de deux barreaux en aluminium collés sur leur longueur, comme décrit dans [Sabatier *et al.*, 2012] et représenté sur la figure fig. 4.9. Le premier barreau est chauffé par une résistance thermique, à travers un amplificateur qui compense la non linéarité entre la tension à laquelle est soumise la résistance et le flux thermique en résultant. La température est mesurée sur le premier barreau, à une distance de 0.5 cm de l'extrémité chauffée par des sondes PT100 en platine et un amplificateur. Toute la surface des barreaux est isolée afin que les transferts de chaleur soient unidirectionnels. Il a été montré dans [Sabatier *et al.*, 2012] que le système peut être considéré comme un système thermique semi-infini, ce qui permet sa description par un

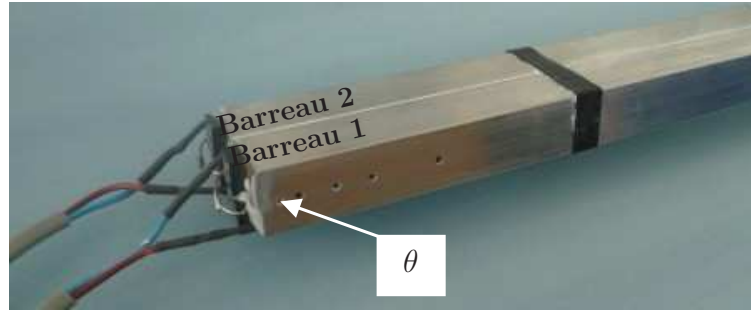


FIGURE 4.9 – Barreaux thermiques (Résistances thermiques de 0 – 12W, orifices des sondes de mesure de température)

modèle non entier [Sabatier *et al.*, 2008a].

Le signal d'entrée du modèle est la tension $V_r(t)$ appliquée à la résistance chauffant le premier barreau. Le signal de sortie est la température $\theta(t)$ mesurée à 0.5 cm de l'extrémité chauffée. La fonction de transfert $G(s)$ reliant $V_r(t)$ et $\theta(t)$ est définie par :

$$G(s) = \frac{-348.5s^{0.5} + 319.9}{1840s^{1.5} - 130s + 485.7s^{0.5} + 1}. \quad (4.129)$$

Les conditions LMI développées pour des modèles non entiers stables d'ordre ν compris entre 0 et 1 sont utilisées pour évaluer la norme H_∞ de $G(s)$, correspondant à son gain maximum. Pour ce faire, une pseudo représentation d'état du modèle est d'abord écrite, soit :

$$G \begin{cases} D^\nu x_s(t) = A_s x_s(t) + B_s u(t) \\ y(t) = C_s x_s(t) \end{cases} \quad (4.130)$$

avec $x_s(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix}$, $A_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.0005 \\ 1 & 0 & -0.2639 \\ 0 & 1 & 0.0707 \end{bmatrix}$, $B_s = \begin{bmatrix} 0.1738 \\ -0.1894 \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\nu = 0.5$.

Remarquons tout d'abord que le modèle (4.130) est stable. L'ensemble des théorèmes apparaissant dans le tableau 4.1 peut donc être appliqué.

Afin d'évaluer le gain maximum du système, ces théorèmes sont reformulés comme des problèmes d'optimisation puis appliqués au modèle (4.130). Les bornes supérieures γ_{opt} obtenues sur la norme H_∞ de $G(s)$ sont récapitulées dans le tableau 4.2. A titre de comparaison, la valeur théorique du gain maximal obtenue numériquement à l'aide de la réponse fréquentielle est également indiquée.

Méthodes	γ_{opt}
Valeur théorique	347.536
Théorème 4.3.4	491.960
Théorème 4.3.7	Infaisable
Théorème 4.3.8	347.600
Théorème 4.3.10	347.600
Théorème 4.3.13	347.600
Théorème 4.3.14	347.600

TABLE 4.2 – Bornes supérieures sur le gain maximal en $^\circ\text{C.V}^{-1}$, déterminées à l'aide des différentes conditions LMI

On constate que les bornes supérieures de la norme H_∞ de $G(s)$ déterminées à l'aide des théorèmes 4.3.8, 4.3.10, 4.3.13 et 4.3.14 sont très proches de la valeur théorique du gain maximal du modèle. Il s'agit d'un cas particulier sur cet exemple puisque seuls les théorèmes 4.3.8 et 4.3.10 fournissent des conditions nécessaires et suffisantes lorsque $0 < \nu < 1$. Le pessimisme des théorèmes 4.3.13 et 4.3.14 apparait très limité sur cet exemple, ce qui est un point positif étant donné que ces théorèmes garantissent également la stabilité. Au contraire, le pessimisme du théorème 4.3.6 est flagrant car la valeur de $\|G(s)\|_{H_\infty}$ obtenue est très grande comparée au gain maximal du modèle.

4.3.4.2 – Exemple 2 : détermination de la marge de module ($1 < \nu < 2$)

Soit le modèle général à un degré de liberté d'une suspension automobile passive représenté par la figure 4.10 où $M = 300$ kg est le quart de la masse du véhicule.

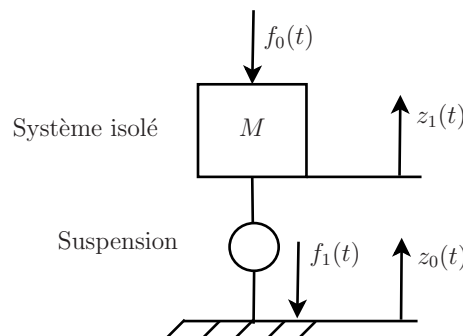


FIGURE 4.10 – Modèle général à un degré de liberté d'une suspension automobile

Le profil de la route $z_0(t)$ et la force $f_0(t)$ appliquée à la suspension sont respec-

tivement considérés comme des perturbations en sortie et en entrée du système dont la fonction de transfert est :

$$G(s) = \frac{1}{Ms^2}. \quad (4.131)$$

$f_1(t)$ est la force générée par la suspension et $z_1(t)$ est le déplacement vertical de la caisse. La déflexion de la suspension notée $z_{10}(t) = z_1(t) - z_0(t)$ est ainsi régulée autour du point d'équilibre nul comme on peut le voir sur la figure 4.11.

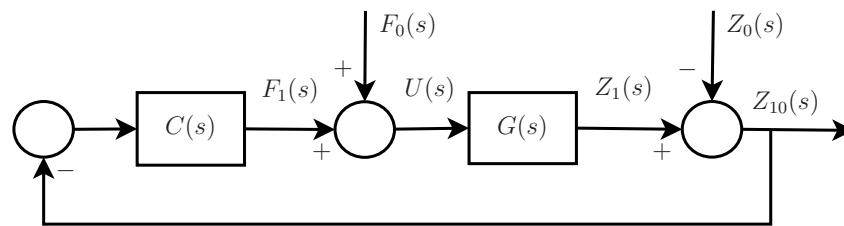


FIGURE 4.11 – Schéma bloc du modèle général à 1 degré de liberté d'une suspension automobile

Le correcteur $C(s)$ est défini par la fonction de transfert :

$$C(s) = C_0 \frac{1 + \left(\frac{s}{\omega_b}\right)^{1.5}}{\frac{s}{\omega_b} \left(1 + \left(\frac{s}{\omega_h}\right)^{1.5}\right)} \quad (4.132)$$

où $C_0 = 100 \text{ N.m}^{-1}$, et où $\omega_b = 0.08 \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_h = 20 \text{ rad.s}^{-1}$ sont respectivement les fréquences de coupure basse et haute du correcteur. Celui-ci a été synthétisé dans le domaine fréquentiel afin de minimiser les effets des perturbations sur la boucle fermée et d'assurer une marge de phase d'environ 45° . Un tel correcteur est utilisé dans la suspension CRONE pour assurer la robustesse de la suspension (et précisément l'invariance de la marge de phase) à des variations de la masse M [Oustaloup *et al.*, 1996].

Le théorème 4.3.8 permet ici de calculer la marge de module du système en boucle fermée de la figure 4.11. La marge de module ζ d'un modèle LTI à une entrée et une sortie est la plus petite distance entre la courbe de Nyquist en boucle ouverte et le point critique -1 . Dans cette application, $G(s)C(s)$ est un système non entier commensurable

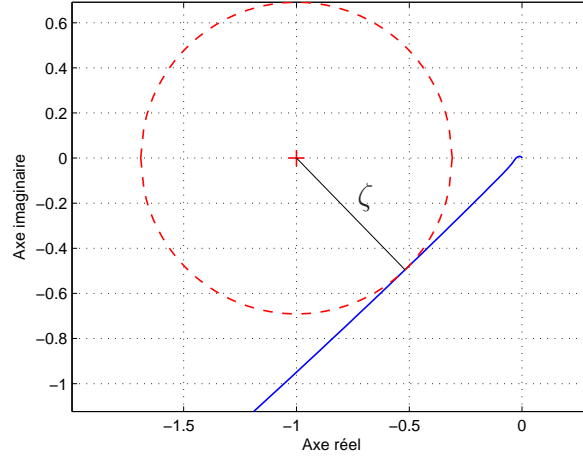


FIGURE 4.12 – Intersection de la courbe de Nyquist de $G(s)C(s)$ (trait plein) et du cercle de centre -1 et de rayon ζ (pointillés).

d'ordre $\nu = 1.5$ ayant pour matrices de pseudo représentation d'état :

$$A_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_h^{1.5} \end{bmatrix} \quad B_g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.133)$$

$$C_g = \frac{C_0 \omega_b \omega_h^{1.5}}{M} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\omega_b^{1.5}} & 0 \end{bmatrix} \quad D_g = 0,$$

et pour pseudo vecteur d'état $x = \begin{bmatrix} z_{10} & (z_{10}^{(1.5)}) & (z_{10}^{(3)}) \end{bmatrix}^T$.

La plus petite distance entre la courbe de Nyquist de $G(s)C(s)$ et le point critique est représentée sur la figure 4.12 et vaut $\zeta = 0.69$.

La marge de module peut être calculée autrement en déterminant la plus importante perturbation additive $\overline{\Delta}(j\omega)$ parmi toutes les perturbations $\Delta(j\omega)$ qui garantissent la stabilité de la boucle fermée de la figure 4.13. Elle est donc donnée par $\zeta = \|\overline{\Delta}(j\omega)\|_{H_\infty}$. Le théorème du petit gain [Desoer et Vidyasagar, 1975] permet ainsi d'affirmer que la marge de module est l'inverse de la norme H_∞ du transfert stable T_{zw} :

$$\zeta = \frac{1}{\|T_{zw}\|_{H_\infty}}. \quad (4.134)$$

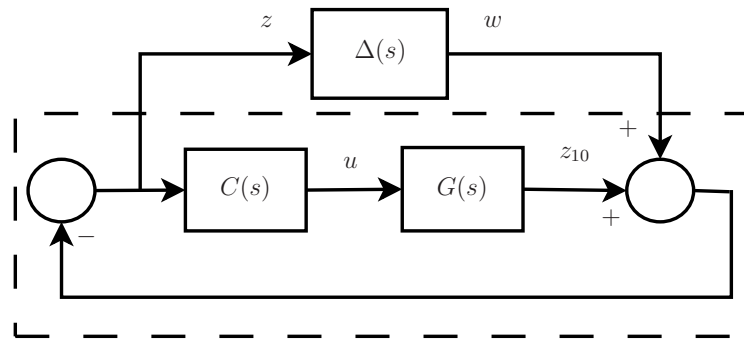


FIGURE 4.13 – Boucle fermée avec une perturbation additive Δ

La pseudo représentation d'état du système T_{zw} est donnée par la relation (2.20) avec :

$$\begin{aligned} A &= A - BC \\ B_w &= -B \\ C_z &= -C \\ D_{zw} &= -1 \end{aligned} \quad (4.135)$$

L'utilisation conjointe de la γ -itération et du théorème 4.3.8 donne :

$$\|T_{zw}\|_{H_\infty} = 1.4479. \quad (4.136)$$

Cette même valeur de $\|T_{zw}\|_{H_\infty}$ a aussi été retrouvée en utilisant les autres théorèmes du tableau, puisque lorsque $1 < \nu < 2$, tous les théorèmes fournissent des conditions nécessaires et suffisantes. La marge de module

$$\zeta = \frac{1}{1.4479} = 0.6907 \quad (4.137)$$

est donc précisément retrouvée.

Sur la figure 4.14, sont représentées $\mathbb{C}_{\nu 0}$ et des valeurs propres de H_γ pour $\gamma = 1.45 > \|T_{zw}\|_{H_\infty}$ et $\gamma = 1.4478 < \|T_{zw}\|_{H_\infty}$. Pour $\gamma > \|T_{zw}\|_{H_\infty}$, il n'y a aucune valeur propre sur $\mathbb{C}_{\nu 0}$. Pour $\gamma < \|T_{zw}\|_{H_\infty}$, les valeurs propres autour de $-1.1 + 1.1i$ appartiennent maintenant à $\mathbb{C}_{\nu 0}$. Les résultats du théorème 4.3.8 sont bien vérifiés.

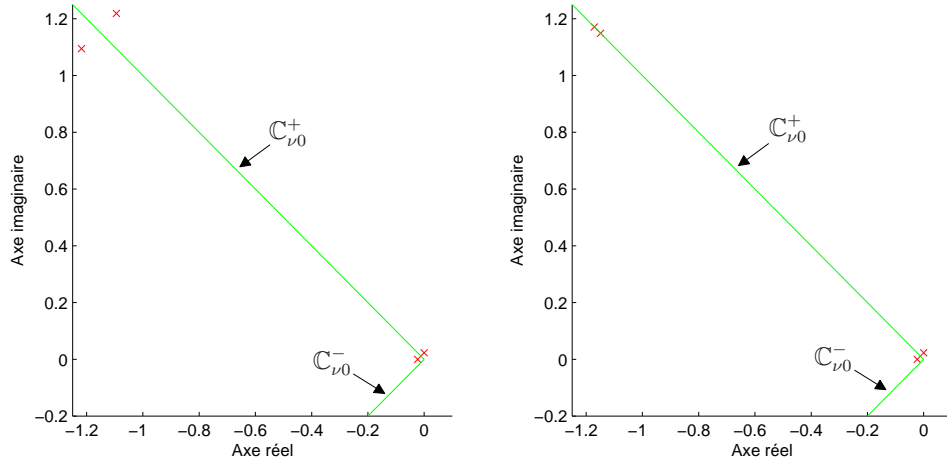


FIGURE 4.14 – Valeurs propres (\times) de H_γ pour $\gamma = 1.45$ (gauche) et $\gamma = 1.4478$ (droite).

4.4 – Commande H_∞ des systèmes non entiers commensurables

Dans cette partie, les conditions LMI développées dans les paragraphes précédents, permettant d'analyser la stabilité et les performances des modèles non entiers, vont permettre d'aborder le problème de synthèse de correcteurs H_∞ conformément aux problématiques du paragraphe 2.4. L'idée est d'appliquer ces conditions LMI d'analyse au système bouclé. Les paramètres du correcteur étant également des variables, les inégalités matricielles obtenues ne sont plus linéaires. Il s'agit alors d'appliquer des changements de variables linéarisants afin d'obtenir des conditions LMI de synthèse.

Le but d'un asservissement étant de garantir des objectifs de performances tout en assurant la stabilité du système bouclé, seules les conditions LMI pouvant être appliquées à des systèmes dont la stabilité est inconnue peuvent être étendues pour la synthèse. Comme on peut le voir dans le tableau 4.1, c'est le cas des conditions LMI des théorèmes 4.3.7, 4.3.13 et 4.3.14.

4.4.1 – Retour de pseudo état

Selon le théorème 4.3.4, similaire au Lemme Borné Réel pour les systèmes entiers, la norme H_∞ de la matrice de transfert stable $T_{zw}(s)$ est bornée par le réel positif γ s'il existe $X = X^* \in \mathbb{C}^{n \times n}$ telle que la LMI (4.63) soit faisable, soit :

$$\begin{bmatrix} \bar{r}A^T X + XrA & XB_w & \bar{r}C_z^T \\ B_w^T X & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ rC_z & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.138)$$

En multipliant, à gauche et à droite, la relation précédente par la matrice

$$\begin{bmatrix} X^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad (4.139)$$

on obtient la LMI

$$\begin{bmatrix} \bar{r}X^{-1}A^T + rAX^{-1} & B_w & \bar{r}X^{-1}C_z^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ rC_z X^{-1} & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.140)$$

En posant $P = X^{-1}$, la relation (4.140) devient :

$$\begin{bmatrix} \bar{r}PA^T + rAP & B_w & \bar{r}PC_z^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ rC_zP & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.141)$$

Si on remplace maintenant la matrice A par la pseudo matrice d'état $A + BK_{re}$ issue d'un système bouclé par retour de pseudo état, et la matrice C_z par $C_z + D_zK_{re}$ dans la relation (4.141), puis en posant $Q = K_{re}P$, on obtient la LMI (4.142) du théorème suivant.

Théorème 4.4.1 (Retour d'état basé sur une inégalité de Riccati) *Le modèle non entier de pseudo représentation d'état (2.20) est BIBO stabilisable par la loi de commande par retour de pseudo état $u = K_{re}x$ s'il existe $P = P^* \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ et $Q \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ telles que :*

$$\begin{bmatrix} \bar{r}PA^T + \bar{r}Q^TB_u^T + rAP + rB_uQ & B_w & \bar{r}PC_z^T + \bar{r}Q^TD_z^T \\ B_w^T & -\gamma^2 I & D_{zw}^T \\ rC_zP + rD_{zu}Q & D_{zw} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.142)$$

avec $r = e^{j(1-\nu)\frac{\pi}{2}}$.

$K_{re} = QP^{-1}$ est le gain d'un retour de pseudo état stabilisant et garantissant $\|T_{zw}\|_{H_\infty} < \gamma$. ■

Il est important de noter que les variables matricielles P et Q du théorème 4.4.1 sont réelles bien que la LMI (4.142) soit déduite de la LMI complexe (4.63). Ce choix permet de synthétiser des correcteurs réels mais introduit un certain pessimisme lors de l'utilisation de la condition LMI (4.142). On remarque en effet, que la condition LMI (4.63) était une condition d'analyse nécessaire et suffisante pour $1 < \nu < 2$ alors que la condition de synthèse (4.142) n'est que suffisante. Il faut aussi noter que pour $0 < \nu < 1$, le pessimisme dû au choix des variables matricielles réelles pour la synthèse vient s'ajouter au pessimisme, évoqué dans le paragraphe 4.3.1.2, dû à la position des valeurs propres de la pseudo matrice hamiltonienne H_γ .

Le théorème 4.4.1 propose une LMI de synthèse issue des méthodes d'analyse basées sur l'inégalité de Riccati et utilisable quel que soit l'ordre ν du modèle non entier. Des LMI de synthèse différentes peuvent être obtenues à partir des théorèmes basés sur le lemme de KYP. Le théorème suivant a ainsi été obtenu par [Liang et al., 2013] à partir du théorème 4.3.13.

Théorème 4.4.2 *Le modèle non entier de pseudo représentation d'état (2.20) est BIBO stabilisable par la loi de commande par retour de pseudo état $u = K_{re}x$ telle que $\|T_{zw}\|_{H_\infty} < \gamma$ si les conditions LMI suivantes sont faisables.*

Cas 1 ($1 < \nu < 2$) : *il existe des matrices $P \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ et $Q \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ telles que*

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \{Ae^{j\theta}P + B_ue^{j\theta}Q\} & * & * \\ C_ze^{j\theta}P + D_{zu}e^{j\theta}Q & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma \end{bmatrix} < 0. \quad (4.143)$$

$K_{re} = QP^{-1}$ est un correcteur statique stabilisant garantissant $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} < \gamma$.

Cas 2 ($0 < \nu < 1$) : *il existe des matrices $P, Q \in \mathbb{S}_n, Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n}, P + jQ > 0$ telles que $X = \cos \theta P + \sin \theta Q$ vérifie la LMI*

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \{AX + B_uY\} & * & * \\ C_zX & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.144)$$

$K_{re} = YX^{-1}$ est un correcteur statique stabilisant garantissant $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} < \gamma$. ■

Ce théorème a été obtenu en remplaçant A par $A + B_uK_{re}$ et C_z par $C_z + D_zK_{re}$ dans les LMI (4.107) et (4.108) du théorème 4.3.13 et en utilisant respectivement les changements de variables linéarisants $Q = K_{re}P$ et $Y = K_{re}X$ dans les cas 1 et 2. Il est important de noter que les variables matricielles des LMI du théorème 4.4.2 sont réelles bien qu'elles soient déduites des LMI complexes (4.107) et (4.108). Ce choix permet de synthétiser des correcteurs réels mais introduit un certain pessimisme lors de leur utilisation. On remarque en effet que la condition LMI (4.107) était une condition d'analyse nécessaire et suffisante pour $1 < \nu < 2$ alors que la condition de synthèse (4.143) n'est que suffisante. Il faut aussi noter que pour $0 < \nu < 1$, le pessimisme introduit est important puisque d'une part la matrice X doit s'écrire $\cos \theta P + \sin \theta Q$ et d'autre part les variables P et Q sont choisies réelles. Le théorème suivant, basé sur le théorème 4.3.14, permet de réduire ce pessimisme.

Théorème 4.4.3 (Retour de pseudo état basé sur le lemme KYP) *Le modèle non entier de pseudo représentation d'état (2.20) est BIBO stabilisable par la loi de commande par retour de pseudo état $u = K_{re}x$ telle que $\|T_{zw}^{cl}\|_{H_\infty} < \gamma$ si les conditions LMI suivantes*

sont faisables.

Cas 1 ($1 < \nu < 2$) : il existe des matrices $P \in \mathbb{R}^{n \times n} > 0$ et $Q \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ telles que

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \{ A e^{j\theta} P + B_u e^{j\theta} Q \} & * & * \\ C_z e^{j\theta} P + D_{zu} e^{j\theta} Q & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma \end{bmatrix} < 0. \quad (4.145)$$

$K_{re} = QP^{-1}$ est un correcteur statique stabilisant garantissant $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} < \gamma$.

Cas 2 ($0 < \nu < 1$) : il existe des matrices $X \in \mathbb{C}^{n \times n} > 0$ et $Y \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ telles que

$$\begin{bmatrix} \text{Sym} \{ A (e^{j\theta} X + e^{-j\theta} \overline{X}) + B_u Y \} & * & * \\ C_z (e^{j\theta} X + e^{-j\theta} \overline{X}) + D_{zu} Y & -\gamma I & * \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.146)$$

$K_{re} = Y (e^{j\theta} X + e^{-j\theta} \overline{X})^{-1}$ est un correcteur statique stabilisant garantissant que $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty} < \gamma$. ■

Ce théorème a été obtenu en remplaçant A par $A + B_u K_{re}$ et C_z par $C_z + D_z K_{re}$ dans les LMI (4.112) et (4.113) du théorème 4.3.14 et en utilisant respectivement les changements de variables linéarisants $Q = K_{re} P$ et $Y = K_{re} (e^{j\theta} X + e^{-j\theta} \overline{X})$ dans les cas 1 et 2. Dans le cas $1 < \nu < 2$, la LMI du théorème 4.4.3 est identique à celle du théorème 4.4.2 et le pessimisme associé est donc le même. Dans le cas $0 < \nu < 1$, le résultat du théorème 4.4.3 est moins pessimiste. En effet, bien que la variable X de la LMI (4.146) soit complexe, cette LMI permet de synthétiser des correcteurs réels car les matrices $e^{j\theta} X + e^{-j\theta} \overline{X}$ et Y sont toutes deux réelles. Aucun pessimisme n'est donc introduit par le choix des variables. La LMI de synthèse reste néanmoins suffisante car il en va de même pour la LMI d'analyse dont elle est issue.

Les résultats précédents permettent d'effectuer la commande H_∞ de systèmes non entiers par retour de pseudo état, ce qui, comme mentionné au paragraphe 2.4.1.2, suppose que toutes les pseudo variables d'état du modèle soient mesurables. Dans le cas contraire, un retour de sortie dynamique peut être utilisé.

4.4.2 – Retour de sortie dynamique

Le principe du retour de sortie dynamique est de trouver une loi de commande de la forme :

$$U(s) = K_{rsd}(s)Y(s) \quad (4.147)$$

où $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ et K_{rsd} est donné par (2.4.2), minimisant une contrainte H_∞ . Le théorème suivant, issu du théorème 4.3.4, permet de trouver une telle loi de commande.

Théorème 4.4.4 (Retour de sortie dynamique) *Le modèle non entier Σ de pseudo représentation d'état (2.20) est BIBO stabilisable par le retour de sortie dynamique $U(s) = K_{rsd}(s)Y(s)$ avec $\|T_{zw}\|_{H_\infty} < \gamma$ s'il existe $Z = Z^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Y = Y^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\hat{B} \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$, $\hat{C} \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$ et $\hat{D} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_y}$ telles que :*

$$\begin{bmatrix} \bar{r}(AZ + B_u \hat{C}) + r(ZA^T + \hat{C}^T B_u^T) & \bar{r}(A + B_u \hat{D} C_y) + r \hat{A}^T & \star & \star \\ \bar{r} \hat{A} + r(A + B_u \hat{D} C_y)^T & \bar{r}(YA + \hat{B} C_y) + r(A^T Y + C_y^T \hat{B}^T) & \star & \star \\ \left(B_w + B_u \hat{D} D_{yw}\right)^T & \left(Y B_w + \hat{B} D_{yw}\right)^T & -\gamma^2 I & \star \\ r(C_z Z + D_{zu} \hat{C}) & r(C_z + D_{zu} \hat{D} C_y) & D_{zw} + D_{zu} \hat{D} D_{yw} & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.148)$$

et

$$\begin{bmatrix} Z & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0. \quad (4.149)$$

Une solution de la LMI (4.148) ayant été trouvée, des matrices non singulières M et N telles que $MN^T = I - ZY$ sont recherchées. Les matrices de la pseudo représentation d'état du correcteur dynamique K_{rsd} sont alors définies par :

$$\begin{cases} D_K &:= \hat{D} \\ C_K &:= (\hat{C} - D_K C_y X) M^{-T} \\ B_K &:= N^{-1} (\hat{B} - Y B_u D_K) \\ A_K &:= N^{-1} \left(\hat{A} - N B_K C_y X - Y B_u C_K M^T \right. \\ &\quad \left. - Y (A + B_u D_K C_y) X \right) M^{-T} \end{cases}. \quad (4.150)$$

■

Preuve Selon le théorème 4.3.4, $\|T_{zw}(s)\|_{H_\infty}$ est inférieur à γ s'il existe des matrices A_K , B_K , C_K , D_K et $X = X^*$ garantissant la faisabilité de la LMI (4.63) pour le système bouclé (2.24). Insérer directement les matrices de la pseudo représentation d'état (2.24) dans la LMI (4.63) conduit à une inégalité matricielle non linéaire. Le changement de variable linéarisant proposé par [Scherer et al., 1997] pour des modèles entiers est ici étendu au cas des modèles non entiers.

Soit $X = X^* \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ une solution de la LMI d'analyse (4.63). On partitionne X et X^{-1} comme suit :

$$X = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & \star \end{bmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{bmatrix} Z & M \\ M^T & \star \end{bmatrix}, \quad (4.151)$$

avec Z et Y des matrices symétriques réelles de taille n .

Sachant que $XX^{-1} = I$, on pose $X \begin{bmatrix} Z \\ M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$, ce qui conduit à :

$$X\Pi_1 = \Pi_2 \quad (4.152)$$

avec

$$\Pi_1 := \begin{bmatrix} Z & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 := \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^T \end{bmatrix}. \quad (4.153)$$

Le changement de variables linéarisant est donc défini par :

$$\begin{cases} \hat{A} := NA_K M^T + NB_K C_y Z + Y B_u C_K M^T \\ \quad + Y (A + B_u D_K C_y) Z \\ \hat{B} := NB_K + Y B_u D_K \\ \hat{C} := C_K M^T + D_K C_y Z \\ \hat{D} := D_K \end{cases} \quad (4.154)$$

où \hat{A} , \hat{B} et \hat{C} appartiennent respectivement à $\mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbb{R}^{n \times n_u}$ et $\mathbb{R}^{n_y \times n}$.

Comme les matrices M et N peuvent toujours être choisies de rang plein, les matrices A_K , B_K , C_K et D_K peuvent toujours être déterminées à partir de \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} , Z et Y .

Ce changement de variables est motivé par les égalités suivantes, déduites de (4.152), (4.153) et (4.154) :

$$r\Pi_1^T X \mathcal{A}(K_{rsd}) \Pi_1 = r\Pi_2^T \mathcal{A}(K_{rsd}) \Pi_1 = r \begin{bmatrix} AZ + B_u \hat{C} & A + B_u \hat{D} C_y \\ \hat{A} & Y A + \hat{B} C_y \end{bmatrix}, \quad (4.155)$$

$$\Pi_1^T X \mathcal{B}(K_{rsd}) = \Pi_2^T \mathcal{B}(K_{rsd}) = \begin{bmatrix} B_w + B_u \hat{D} D_w \\ Y B_w + \hat{B} D_w \end{bmatrix}, \quad (4.156)$$

$$r\mathcal{C}(K_{rsd}) \Pi_1 = \begin{bmatrix} C_z Z + D_{zu} \hat{C} & C_z + D_{zu} \hat{D} C_y \end{bmatrix}, \quad (4.157)$$

$$\Pi_1^T X \Pi_1 = \Pi_1^T \Pi_2 = \begin{bmatrix} Z & I \\ I & Y \end{bmatrix}, \quad (4.158)$$

où $\mathcal{A}(K_{rsd})$, $\mathcal{B}(K_{rsd})$ et $\mathcal{C}(K_{rsd})$ sont les matrices de la pseudo représentation d'état du système bouclé comme définie au paragraphe 2.4.1.2.

L'existence d'un correcteur dynamique stabilisant K_{rsd} tel que $\|T_{zw}\|_{H_\infty} < \gamma$ est déterminée par l'existence d'une solution $X = X^* > 0$ à la LMI (4.63). Si on multiplie la relation (4.63) par $\text{diag}(\Pi_1^T, I, I)$ à gauche et par $\text{diag}(\Pi_1, I, I)$ à droite, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \bar{r}\Pi_1^T \mathcal{A}(K_{rsd})^T X \Pi_1 + \Pi_1^T X r \mathcal{A}(K_{rsd}) \Pi_1 & \Pi_1^T X \mathcal{B}(K_{rsd}) & \bar{r}\Pi_1^T \mathcal{C}(K_{rsd})^T \\ \mathcal{B}(K_{rsd})^T X \Pi_1 & -\gamma^2 I & \mathcal{D}(K_{rsd})^T \\ r \mathcal{C}(K_{rsd}) \Pi_1 & \mathcal{D}(K_{rsd}) & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (4.159)$$

La LMI (4.148) est obtenue en remplaçant $r\Pi_1^T X \mathcal{A}(K_{rsd}) \Pi_1$, $\Pi_1^T X \mathcal{B}(K_{rsd})$ et $r\mathcal{C}(K_{rsd}) \Pi_1$ par leurs expressions explicites respectives (4.155), (4.156) et (4.157).

On suppose maintenant que des matrices solutions des LMI (4.148) et (4.149) ont été trouvées. Les matrices M et N doivent être choisies telles que :

$$MN^T = I - ZY. \quad (4.160)$$

Comme Z et Y vérifient la relation (4.149), on peut toujours trouver des matrices carrées non singulières M et N vérifiant la relation (4.160).

Les matrices de la pseudo représentation d'état du correcteur dynamique K_{rsd} sont déterminées par la relation (4.150) qui n'est autre que l'inverse du changement de variables linéarisant (4.154). Cette inversion est possible car les matrices Π_1 et Π_2 , dépendant de M et N sont des matrices carrées et non singulières. Le correcteur dynamique K_{rsd} garantit donc bien que $\|T_{zw}\|_{H_\infty} < \gamma$. ■

Etant issu du théorème 4.3.4, le théorème 4.4.4 souffre donc du même pessimisme lorsque $0 < \nu < 1$. Par ailleurs, comme pour le retour d'état, les variables matricielles des LMI 4.148 et 4.149 ont dû être choisie réelles afin d'obtenir un correcteur dynamique réel.

Remarque 4.4.5 Le théorème 4.3.14, basé sur le lemme KYP, offre une LMI d'analyse réelle et peu pessimiste lorsque $0 < \nu < 1$. Mais celle-ci est difficilement extensible à la synthèse par retour de sortie car le changement de variable linéarisant utilisé n'est plus applicable. Il faudrait, en effet, déterminer des matrices de passage Π_1 et Π_2 spécifiques à X et à \bar{X} . Il en va donc de même pour les variables \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} , \hat{D} , Z et Y de la LMI de synthèse après le changement de variable. Il paraît donc délicat d'inverser ce changement de variable pour déterminer les matrices du correcteur.

4.5 – Conclusion

Ce chapitre est dédié à la formulation de conditions LMI pour la commande H_∞ de modèles non entiers décrits par une pseudo représentation d'état.

Pour ce faire, des conditions LMI permettant d'analyser la BIBO stabilité de ces modèles ont d'abord été proposées. La première condition repose sur une analyse algébrique du système tandis que les suivantes sont basées sur une caractérisation géométrique du domaine de stabilité ou du domaine d'instabilité. Dans la dernière condition LMI, le formalisme des régions LMI généralisées (GLMI) a permis de contourner le problème de non convexité du domaine de stabilité pour un ordre commensurable ν tel que $0 < \nu < 1$.

Des conditions LMI permettant d'évaluer les performances des modèles non entiers grâce à la norme H_∞ de certains transferts ont ensuite été proposées. Celles-ci reposent principalement sur l'étude de la pseudo matrice hamiltonnienne H_γ d'un modèle non entier. Le lemme KYP généralisé s'est enfin avéré être un outil puissant pour la formulation de conditions LMI pour le calcul de la norme H_∞ .

Ces analyses en stabilité et en performances des systèmes non entiers ont finalement permis de développer des conditions LMI pour la commande H_∞ des systèmes non entiers par retour de pseudo état et par retour de sortie dynamique. L'avantage de ces conditions LMI par rapport à celles proposées dans le chapitre 3 est que la norme H_∞ y est calculée directement à partir des matrices de la pseudo représentation d'état, alors qu'un majorant de la norme H_∞ de la partie aperiodique de la réponse impulsionnelle devait être trouvé au chapitre 3.

En revanche, dans le cas d'un retour de sortie, l'avantage de la méthode du chapitre 3 est de produire des correcteurs entiers directement implantables (pas de phase d'approximation nécessaire).

La plupart des résultats obtenus dans ce chapitre et dans les chapitres précédents sont à présent utilisés dans le chapitre 5 pour l'isolation sismique d'un prototype de pont décrit par un modèle non entier.

Chapitre 5

Application : Isolation sismique d'un pont

Contents

5.1 – Introduction	149
5.2 – Modèle non entier du pont	150
5.3 – Commande H_∞ basée sur la décomposition d'un modèle non entier en un modèle entier et un modèle parabolique	152
5.4 – Commande H_∞ basée sur la pseudo représentation d'état . .	163
5.5 – Conclusion	167

5.1 – Introduction

Dans ce chapitre, les développements théoriques de ce mémoire sont appliqués au problème d'isolation sismique d'une maquette de pont.

La maquette, représentée sur la figure 5.1, est un prototype à l'échelle 1 : 4 décrit dans [Tsopelas *et al.*, 1996]. Elle comprend une unique travée avec un plateau rigide et deux piliers flexibles. Son système d'isolation vibratoire est hybride. La partie passive se compose de deux cales visco-élastiques circulaires situées au sommet de chaque pilier. La partie active fait appel à deux amortisseurs à fluide liés d'une part au plateau du pont et d'autre part au sommet de chaque pilier.

L'objectif est de déterminer une loi de commande régissant la force que doivent appliquer les amortisseurs pour minimiser les déplacements du plateau. Une première approche, basée sur de la logique floue, est proposée dans [Symans et Kelly, 1999].

Ici, le comportement dynamique des cales est modélisé à l'aide d'équations différentielles non entières. Le déplacement du plateau du fait de l'accélération du sol est alors décrit à l'aide d'un modèle non entier, comme détaillé dans la partie 5.2.

Ce modèle non entier est ensuite mis à profit dans les parties 5.3 et 5.4, pour calculer différentes lois de commande basées respectivement sur les approches présentées dans les chapitres 3 et 4.

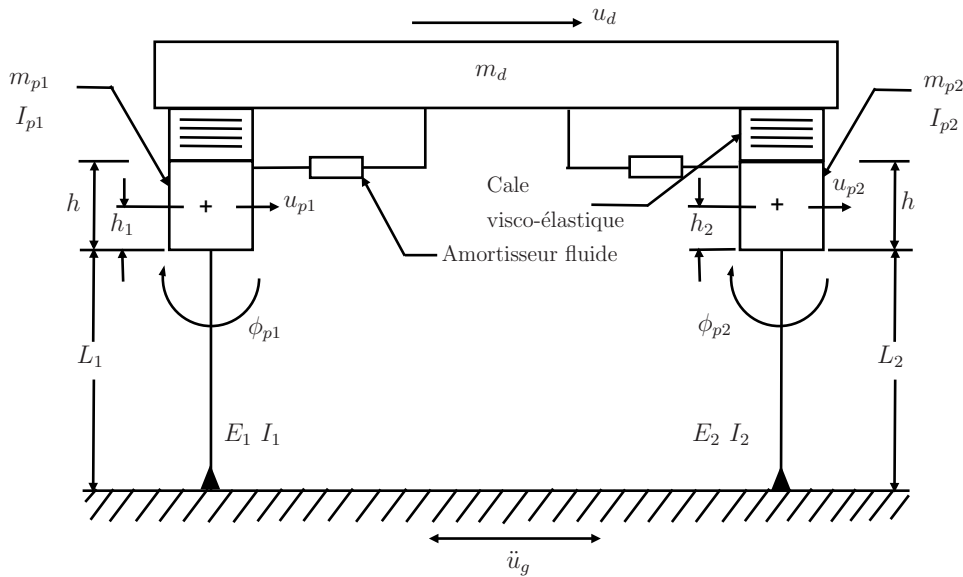


FIGURE 5.1 – Maquette du pont

5.2 – Modèle non entier du pont

Les degrés de liberté retenus pour écrire les équations du mouvement de la maquette du pont sont les déplacements longitudinaux relatifs du plateau et des piliers, respectivement $u_d(t)$ et $u_{p_i}(t)$, et les mouvements de rotation $\phi_{p_i}(t)$ du sommet des piliers, où $i \in \{1, 2\}$ fait référence à un pilier particulier.

Il est à noter que les piliers flexibles sont supposés fixes à leur base mais peuvent effectuer des rotations à leur sommet [Tsopelas *et al.*, 1996]. Les sommets des piliers sont modélisés par des masses compactes de hauteur h et de centre de masse situé à une distance h_i de la base de la masse compacte.

Seule la moitié du pont est modélisée, soit le premier pilier ($i = 1$) et la moitié de la masse du plateau car chaque pilier supporte la même masse et se comporte donc de la même manière. Les équations du mouvement sont donc :

$$\frac{m_d}{2} (\ddot{u}_d(t) + \ddot{u}_g(t)) - F_{l1}(t) = 0, \quad (5.1)$$

$$m_{p1} (\ddot{u}_{p1}(t) + \ddot{u}_g(t) - h_1 \ddot{\phi}_{p1}(t)) + F_{p1}(t) + F_{l1}(t) = 0, \quad (5.2)$$

$$I_{p1} \ddot{\phi}_{p1}(t) + M_{p1}(t) + F_{p1}(t)h_1 + F_{l1}(t)(h - h_1) = 0, \quad (5.3)$$

où $u_g(t)$ désigne le déplacement du sol et $F_{l1}(t)$ est la force latérale du système d'isolation. $F_{p1}(t)$ et $M_{p1}(t)$ sont respectivement la force de frottement et le moment de torsion au sommet du pilier. La force latérale $F_{l1}(t)$ s'écrit :

$$F_{l1}(t) = F_{b1}(t) + F_{d1}(t), \quad (5.4)$$

où $F_{b1}(t)$ est la force exercée par les cales visco-élastiques du premier pilier et $F_{d1}(t)$ est la force de l'amortisseur correspondant.

Les cales visco-élastiques sont modélisées par une équation différentielle de *Zener* à quatre paramètres [Dinzart et Lipiński, 2009][Sasso *et al.*, 2011] :

$$F_{b1}(t) + \lambda^\alpha F_{b1}^{(\alpha)}(t) = G_\infty u_{b1}(t) + G_0 \lambda^\alpha u_{b1}^{(\alpha)}(t). \quad (5.5)$$

Les valeurs numériques des paramètres G_0 , G_∞ , λ et α sont données dans le tableau 5.1. $u_{b1}(t) = u_{p1}(t) - u_d(t)$ est le déplacement des cales visco-élastiques. La force latérale et le moment de torsion à la jonction du sommet du pilier à sa colonne s'écrivent :

$$F_{p1}(t) = \frac{12E_1I_1}{L_1^3}u_{p1}(t) + \frac{6E_1I_1}{L_1^2}\phi_{p1}(t) + C_{p1}^1\dot{u}_{p1}(t), \quad (5.6)$$

$$M_{p1}(t) = \frac{6E_1 I_1}{L_1^2} u_{p1}(t) + \frac{4E_1 I_1}{L_1} \phi_{p1}(t) + C_{p1}^2 \dot{\phi}_{p1}(t), \quad (5.7)$$

où C_{p1}^1 est le coefficient d'amortissement propre des colonnes, dû aux mouvements latéraux tandis que C_{p1}^2 est le coefficient d'amortissement propre dû à la rotation des piliers. C_{p1}^1 est choisi de telle sorte que le ratio d'amortissement dans le mode vibratoire fondamental des piliers soit de 5%. C_{p1}^2 est, quant à lui, négligeable. Les valeurs numériques de tous les autres paramètres qui apparaissent dans les équations (5.1 - 5.7) sont données dans le tableau 5.1.

Paramètres	Valeurs numériques
Masse du plateau (md)	233.23 kN s ² m ⁻¹
Masse du pilier (m_{p1}, m_{p2})	14.52 kN s ² m ⁻¹
Longueur du pilier (L_1, L_2)	6.4 m
Distance au centre de masse du pilier (h_1, h_2)	0.392 m
Hauteur du sommet du pilier (h)	1.652 m
Moment d'inertie du sommet du pilier (I_{p1}, I_{p2})	9.78 kN s ² m
Module d'élasticité de la colonne du pilier (E_1, E_2)	200 000 MPa
Moment d'inertie de la colonne du pilier (I_1, I_2)	0.007736 m ⁴
Paramètres caractéristiques du modèle non entier de Zener :	
λ	1.069 s
G_∞	7.926 MPa
G_0	26.42 MPa
α	0.25

TABLE 5.1 – Valeurs numériques des paramètres de la maquette de pont

Grâce aux relations (5.1 - 5.7), la dynamique de la première moitié du pont peut être décrite à l'aide d'un modèle non entier commensurable d'ordre $\nu = 0.25$ et de pseudo représentation d'état :

$$^H \begin{cases} D^\nu x_s(t) &= A_s x_s(t) + B_{s1} \ddot{u}_g(t) + B_{s2} F_{d1}(t) \\ u_d(t) &= C_s x_s(t) \end{cases}, \quad (5.8)$$

avec

$$x_s = \begin{bmatrix} x_d^T & x_u^T & x_\phi^T & F_{d1}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{25},$$

$$\begin{aligned} x_d &= \begin{bmatrix} u_d & u_d^{(\nu)} & u_d^{(2\nu)} & u_d^{(3\nu)} & u_d^{(4\nu)} & u_d^{(5\nu)} & u_d^{(6\nu)} & u_d^{(7\nu)} \end{bmatrix}^T, \\ x_u &= \begin{bmatrix} u_{p1} & u_{p1}^{(\nu)} & u_{p1}^{(2\nu)} & u_{p1}^{(3\nu)} & u_{p1}^{(4\nu)} & u_{p1}^{(5\nu)} & u_{p1}^{(6\nu)} & u_{p1}^{(7\nu)} \end{bmatrix}^T, \\ x_\phi &= \begin{bmatrix} \phi_{p1} & \phi_{p1}^{(\nu)} & \phi_{p1}^{(2\nu)} & \phi_{p1}^{(3\nu)} & \phi_{p1}^{(4\nu)} & \phi_{p1}^{(5\nu)} & \phi_{p1}^{(6\nu)} & \phi_{p1}^{(7\nu)} \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Le signal de commande est la force $F_{d1}(t)$ dans le premier pilier ($i = 1$). L'accélération $\ddot{u}_g(t)$ du sol est, quant à elle, considérée comme une perturbation à rejeter.

Afin de tester l'efficacité des méthodes développées dans les chapitres précédents, la méthode de synthèse utilisant la décomposition d'un modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique développée dans le chapitre 3 est d'abord appliquée à ce modèle. Les conditions LMI développées dans le chapitre 4 et basées sur la pseudo représentation d'état sont ensuite appliquées.

5.3 – Commande H_∞ basée sur la décomposition d'un modèle non entier en un modèle entier et un modèle parabolique

La méthodologie développée dans le chapitre 3 permet d'écrire le modèle non entier du pont comme un modèle entier affecté d'une incertitude multiplicative.

Le procédé H ayant deux entrées, $\ddot{u}_g(t)$ et $F_{d1}(t)$ et une sortie $u_d(t)$, un modèle entier incertain doit être déterminé pour chacun des transferts $H_1(s)$ et $H_2(s)$ reliant respectivement l'accélération $\ddot{u}_g(t)$ et la force $F_{d1}(t)$ des amortisseurs aux mouvements longitudinaux $u_d(t)$ du plateau du pont :

$$U_d(s) = H_1(s)\ddot{U}_g(s) + H_2(s)F_{d1}(s) \quad (5.10)$$

avec :

$$H_1(s) = C_s(s^\nu I - A_s)^{-1} B_{s1} \quad (5.11)$$

et

$$H_2(s) = C_s(s^\nu I - A_s)^{-1} B_{s2}. \quad (5.12)$$

Ces deux transferts d'ordre commensurable $\nu = 0.25$ ont dix-sept s^ν -zéros notés z_i , $i \in \{1 \dots 17\}$ et vingt-cinq s^ν -pôles notés λ_j , $j \in \{1 \dots 25\}$. Les relations (1.65) et

(1.66) permettent de calculer les six pôles générés par ces s^ν -pôles :

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -0.46 \pm 335.01j \\ p_{3,4} &= -3.82 \pm 46.91j \\ p_{5,6} &= -0.32 \pm 9.30j. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Ces pôles permettent d'écrire les transferts $H_1(s)$ et $H_2(s)$ sous la forme de la somme d'un transfert entier correspondant à la partie exponentielle des différents modes et d'un autre transfert correspondant à la partie apériodique des modes :

$$H_1(s) = H_{exp1}(s) + H_{ap1}(s) \quad (5.14)$$

et

$$H_2(s) = H_{exp2}(s) + H_{ap2}(s). \quad (5.15)$$

$H_{exp1}(s)$ et $H_{exp2}(s)$ sont obtenus en sommant la contribution des pôles associés à chaque s^ν -pôle des deux transferts selon les transformées de *Laplace* des équations (3.6) et (1.66-1.67), soient :

$$H_{exp1}(s) = \frac{0.0027(s - 373.8)(s^2 + 8.118s + 2297)(s^2 + 0.928s + 1.122 \cdot 10^5)}{(s^2 + 0.6473s + 86.550)(s^2 + 7.634s + 2215)(s^2 + 0.917s + 1.122 \cdot 10^5)} \quad (5.16)$$

et

$$H_{exp2}(s) = \frac{-3.141 \cdot 10^{-8}(s - 276.4)(s^2 + 3.049s + 1120)(s^2 + 0.190s + 1.121 \cdot 10^5)}{(s^2 + 0.647s + 86.550)(s^2 + 7.634s + 2215)(s^2 + 0.917s + 1.122 \cdot 10^5)}. \quad (5.17)$$

De même, $H_{ap1}(s)$ et $H_{ap2}(s)$ peuvent s'écrire à l'aide de la transformée de Laplace des équations (3.7-3.8) et (1.70).

Les parties apériodiques $H_{ap1}(s)$ et $H_{ap2}(s)$ sont ensuite majorées en termes de gain respectivement par $\overline{H_{ap1}}(s)$ et $\overline{H_{ap2}}(s)$ avec :

$$|\overline{H_{ap1}}(j\omega)| = |\tilde{H}_{ap1}^2(j\omega)| + \overline{E_{ap1}}(\omega) \quad (5.18)$$

et

$$|\overline{H_{ap2}}(j\omega)| = |\tilde{H}_{ap2}^2(j\omega)| + \overline{E_{ap2}}(\omega), \quad (5.19)$$

où $\tilde{H}_{ap1}^2(s)$ et $\tilde{H}_{ap2}^2(s)$ sont calculées à l'aide de la relation (3.47) en choisissant $N = 10$, $z_N = -5$ et $z_M = 20$, soient :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{ap1}^2(s) = & \frac{-0.0024(s + 148.4)(s + 6.662)(s + 0.174)(s + 0.0107)(s + 7.343 \cdot 10^{-4})}{(s + 148.4)(s + 12.18)(s + 1)(s + 0.082)(s + 0.0067)(s + 5.531 \cdot 10^{-4})} \\ & \frac{(s + 5.361 \cdot 10^{-5})(s + 4.093 \cdot 10^{-6})(s + 3.221 \cdot 10^{-7})(s + 2.582 \cdot 10^{-8})}{(s + 4.54 \cdot 10^{-5})(s + 3.727 \cdot 10^{-6})(s + 3.059 \cdot 10^{-7})(s + 2.511 \cdot 10^{-8})} \end{aligned} \quad (5.20)$$

et

$$\tilde{H}_{ap2}^2(s) = \frac{3.118 \cdot 10^{-8}(s + 147.8)(s + 4.82)(s + 0.168)(s + 0.0106)(s + 7.304 \cdot 10^{-4})}{(s + 148.4)(s + 12.18)(s + 1)(s + 0.082)(s + 0.0067)(s + 5.531 \cdot 10^{-4})} \cdot \frac{(s + 5.347 \cdot 10^{-5})(s + 4.088 \cdot 10^{-6})(s + 3.219 \cdot 10^{-7})(s + 2.582 \cdot 10^{-8})}{(s + 4.54 \cdot 10^{-5})(s + 3.727 \cdot 10^{-6})(s + 3.059 \cdot 10^{-7})(s + 2.511 \cdot 10^{-8})} \quad (5.21)$$

et où les erreurs d'approximation $\overline{E_{ap1}}(\omega)$ et $\overline{E_{ap2}}(\omega)$ sont calculées à l'aide de la relation (3.49).

Finalement, le modèle non entier associé à chaque transfert peut s'écrire comme un modèle entier incertain dont le modèle nominal est donné par :

$$H_{10}(s) = H_{exp1}(s) + \tilde{H}_{ap1}^2(s) \quad (5.22)$$

et

$$H_{20}(s) = H_{exp2}(s) + \tilde{H}_{ap2}^2(s). \quad (5.23)$$

Afin d'écrire l'incertitude multiplicative associée à chaque transfert, les erreurs relatives suivantes sont calculées :

$$E_1^r(s) = \frac{H_1(s)}{H_{10}(s)} - 1, \quad (5.24)$$

$$E_2^r(s) = \frac{H_2(s)}{H_{20}(s)} - 1. \quad (5.25)$$

Ces erreurs sont ensuite majorées en termes de gain par des filtres $W_{\ddot{u}_g}(s)$ et $W_{F_{d1}}(s)$. Chaque transfert s'écrit alors :

$$H_1^i(s) = H_{10}(s) (1 + W_{\ddot{u}_g}(s)\delta_1(s)), \quad (5.26)$$

$$H_2^i(s) = H_{20}(s) (1 + W_{F_{d1}}(s)\delta_2(s)). \quad (5.27)$$

Le modèle entier incertain $H_m^i(s)$ de sortie u_d et d'entrées \ddot{u}_g et F_{d1} , dont une réalisation possible est le modèle non entier $H(s)$, est représenté sur la figure 5.2.

Des pseudo représentations d'état associées à $H_m^0(s)$, $W_{\ddot{u}_g}(s)$ et $W_{F_{d1}}(s)$ sont données par les équations suivantes :

$$H_m^0 \begin{cases} \dot{\eta}_0(t) &= A_0\eta_0(t) + B_{01}\ddot{u}_g(t) + B_{02}F_{d1}(t) \\ u_d^0(t) &= C_0\eta(t) + D_{01}\ddot{u}_g(t) \end{cases}, \quad (5.28)$$

$$W_{\ddot{u}_g} \begin{cases} \dot{\eta}_u(t) &= A_u\eta_u(t) + B_u w_u \\ y_u(t) &= C_u\eta_u(t) + D_u w_u(t) \end{cases}, \quad (5.29)$$

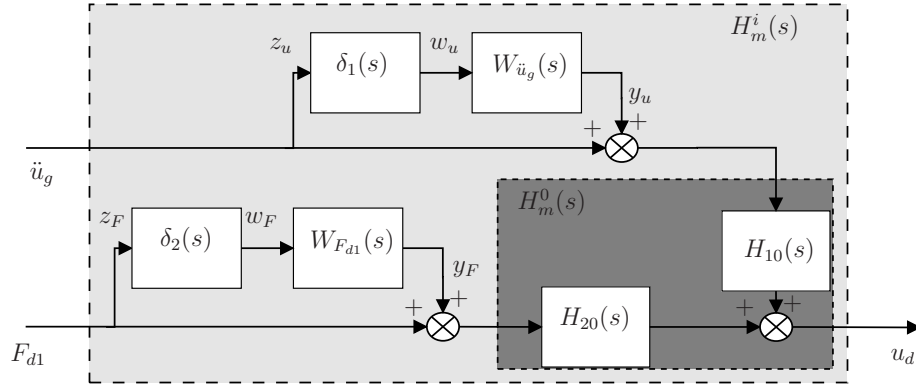


FIGURE 5.2 – Représentation de $G(s)$ comme un modèle entier $H_m^0(s)$ affecté par des incertitudes multiplicatives

$$W_{F_{d1}} \begin{cases} \dot{\eta}_F(t) = A_F \eta_F(t) + B_F w_F \\ y_F(t) = C_F \eta_F(t) + D_F w_F(t) \end{cases} \quad (5.30)$$

La figure 5.3 fait apparaître les gains des réponses fréquentielles des transferts $H_1(s)$ et $H_2(s)$, ainsi que ceux des modèles entiers nominaux et incertains associés. On constate que les modèles nominaux et non entiers sont bien inclus dans le faisceau de modèles incertains pour les deux transferts.

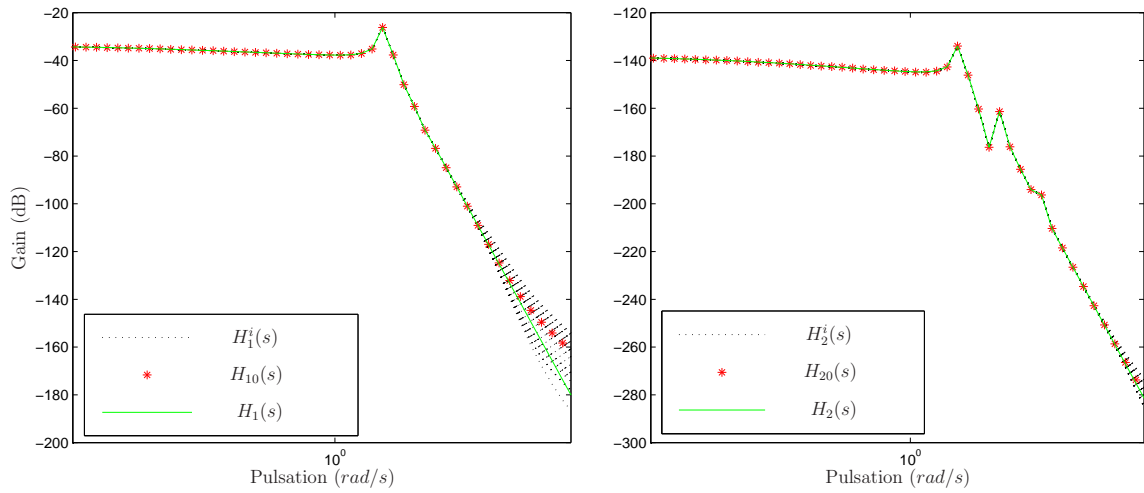


FIGURE 5.3 – Comparaison des réponses fréquentielles de $H_1(s)$ et $H_2(s)$ à celles des modèles nominaux ($H_{10}(s)$ et $H_{20}(s)$) et incertains associés ($H_1^i(s)$ et $H_2^i(s)$)

Un correcteur K_{rsd} vérifiant des performances mesurées à l'aide de la norme H_∞ peut maintenant être calculé pour le modèle entier incertain $H_m^i(s)$. Les performances seront imposées à l'aide de fonctions de pondérations $W_1(s)$ et $W_2(s)$ imposant des contraintes

à la boucle fermée conformément au schéma bloc de la figure 5.4.

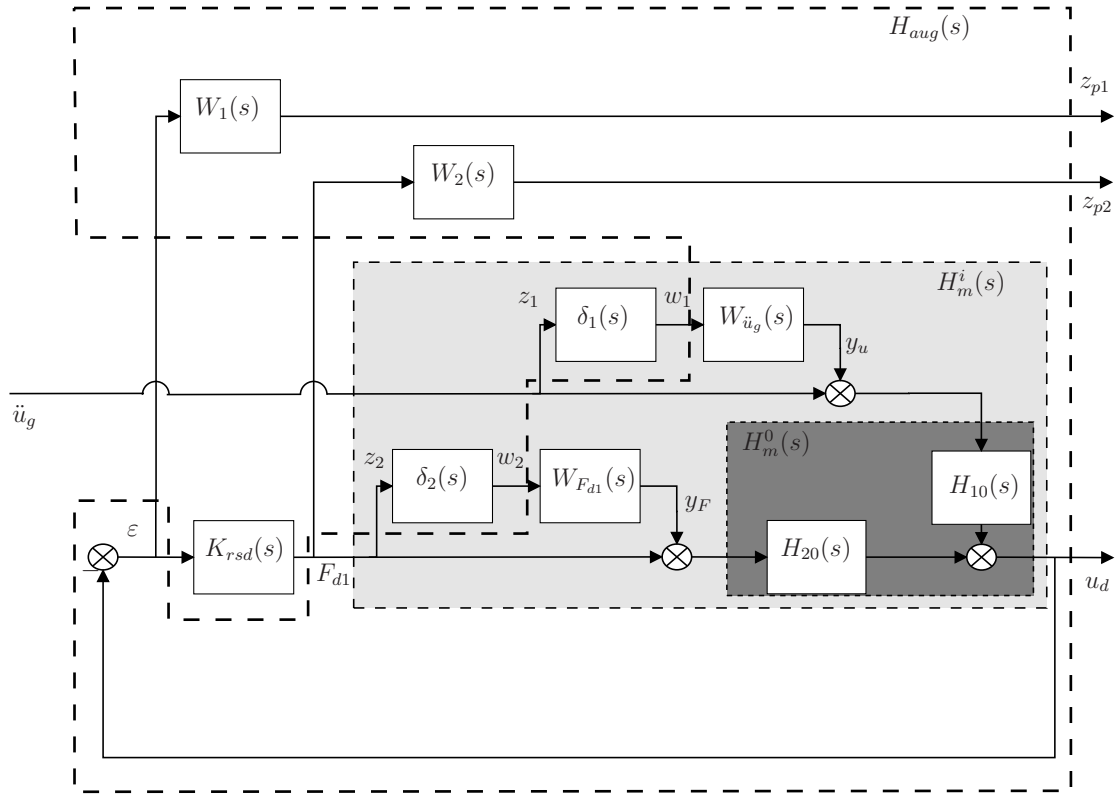


FIGURE 5.4 – Modèle entier incertain du pont $H_m^i(s)$ augmenté des filtres de pondération et boucle de commande associée

Le filtre $W_1(s)$ permet de mettre en forme la fonction de sensibilité de l'entrée $S_i(s)$ entre l'accélération \ddot{u}_g et l'erreur ε :

$$T_{\varepsilon\ddot{u}_g}(s) = S_i(s) = \frac{T_{u_d\ddot{u}_g}^i(s)}{1 + K_{rsd}(s)T_{u_dF_{d1}}^i(s)}. \quad (5.31)$$

Il permet d'imposer la bande passante de l'asservissement à travers sa pulsation au gain unité et d'atténuer les dépassements de la réponse temporelle en fixant son gain de façon à limiter la résonance de $S_i(s)$. Le filtre $W_2(s)$ permet quant à lui d'atténuer les effets des bruits de mesures et d'éviter d'avoir des commandes trop importantes. Il contraint la fonction de sensibilité de la commande $KS_i(s)$ entre l'accélération \ddot{u}_g et la commande F_{d1} :

$$T_{F_{d1}\ddot{u}_g}(s) = KS_i(s) = K_{rsd}(s)S_i(s). \quad (5.32)$$

Pour que les gains des transferts $S_i(s)$ et $KS_i(s)$ soient respectivement sous les gains des pondérations $W_1^{-1}(s)$ et $W_2^{-1}(s)$ quelles que soient les incertitudes δ_1 et δ_2 telles que

$\|\delta_1\|_{H_\infty} < 1$ et $\|\delta_2\|_{H_\infty} < 1$, le correcteur K_{rsd} doit vérifier :

$$\|F_l(H_{aug}, K_{rsd}(s))\|_\infty < 1, \quad (5.33)$$

où H_{aug} est le modèle augmenté, contenant $H_{10}(s)$, $H_{20}(s)$, $W_{\ddot{u}_g}(s)$, $W_{F_{d1}}(s)$, $W_1(s)$ et $W_2(s)$, encadré sur la figure 5.4.

Si la relation (5.33) est vérifiée, alors :

$$\begin{cases} |S_i(j\omega)| < |W_1^{-1}(j\omega)| \\ |KS_i(j\omega)| < |W_2^{-1}(j\omega)| \end{cases}, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, \quad \forall (\delta_1(s), \delta_2(s)) \text{ t.q. } \begin{cases} \|\delta_1(s)\|_{H_\infty} < 1 \\ \|\delta_2(s)\|_{H_\infty} < 1 \end{cases}. \quad (5.34)$$

Pour cette application, $W_1(s)$ et $W_2(s)$ ont été choisis de manière à réduire le déplacement maximum du plateau du pont de moitié par rapport au comportement du procédé non corrigé, tout en minimisant la force F_{d1} générée par l'amortisseur.

Soit $\overline{u_d}$ le déplacement maximal du plateau du pont suite à une sollicitation sismique d'accélération maximale $\overline{\ddot{u}_g}$. Afin de réduire le déplacement du pont de moitié, le gain du filtre $W_1^{-1}(s)$ doit être au maximum de $\frac{\overline{u_d}}{2\overline{\ddot{u}_g}}$ dans la bande de fréquence des excitations sismiques, soit entre 3 Hz et 10 Hz.

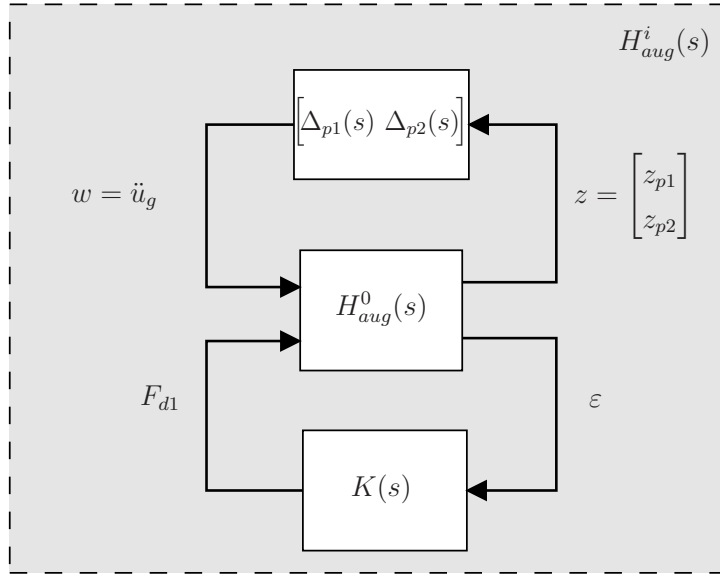
Minimiser la force F_{d1} générée par l'amortisseur revient à minimiser le gain du filtre $W_2(s)^{-1}$ dans la bande de fréquence des excitations sismiques.

Cette mise en forme idéale du problème n'a malheureusement pas permis d'obtenir de solution répondant au cahier des charges lors de plusieurs tentatives de résolution. Les filtres $W_{\ddot{u}_g}(s)$ et $W_{F_{d1}}(s)$ semblent en effet très contraignants vis-à-vis des incertitudes du modèle et la complexité calculatoire liée à la grande dimension des modèles manipulés n'a pas favoriser la convergence des méthodes numériques de résolution.

Pour répondre au cahier des charges, la définition d'un modèle augmenté plus simple $H_{aug}^0(s)$ a été nécessaire. Il est obtenu en ne considérant que les transferts nominaux $H_{10}(s)$, $H_{20}(s)$ et les filtres $W_1(s)$ et $W_2(s)$. La synthèse est alors d'abord effectuée sur le modèle nominal augmenté $H_{aug}^0(s)$, puis on vérifie a posteriori (par un tirage aléatoire au niveau des incertitudes) que le modèle incertain respecte les contraintes fréquentielles imposées par $W_1(s)$ et $W_2(s)$. Le problème de synthèse H_∞ associé à $H_{aug}^0(s)$ est représenté sur la figure 5.5.

$W_1(s)$ et $W_2(s)$ sont des filtres du second ordre dont les pseudo représentations d'état sont définies par :

$$W_1 : \begin{cases} \eta_1(t) &= A_1 \eta_1(t) + B_1 \varepsilon(t) \\ z_{p1}(t) &= C_1 \eta_1(t) + D_1 \varepsilon(t) \end{cases} \quad (5.35)$$


 FIGURE 5.5 – Problème de synthèse H_∞ associé à $H^0_{aug}(s)$

et

$$W_2 : \begin{cases} \eta_2(t) &= A_2 \eta_2(t) + B_2 F_{d1}(t) \\ z_{p2}(t) &= C_2 \eta_2(t) + D_2 F_{d1}(t) \end{cases} . \quad (5.36)$$

Le modèle augmenté H^0_{aug} peut alors s'écrire :

$$H^0_{aug} \begin{cases} x(t) &= A x(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ y(t) &= C_y x(t) + D_{yu} u(t) + D_{yw} w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t) \end{cases} \quad (5.37)$$

où $x = \begin{bmatrix} x_s^T & \eta_1^T & \eta_2^T \end{bmatrix}^T$, $w = \ddot{u}_g$, $z = \begin{bmatrix} z_{p1} & z_{p2} \end{bmatrix}^T$ et :

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ -B_1 C_0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} B_{01} \\ -B_1 D_{01} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$B_u = \begin{bmatrix} B_{02} \\ 0 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} -D_1 C_0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}$$

$$D_{zw} = \begin{bmatrix} -D_1 D_{01} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

$$C_y = \begin{bmatrix} -C_0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = -D_{01}$$

$$D_{yu} = 0.$$

La boîte à outils « Robust Control » du logiciel MATLAB est utilisée pour trouver le correcteur entier stabilisant $K_{rsd}(s)$ par retour de sortie dynamique garantissant (5.33). Ayant 30 pôles et 29 zéros, la fonction de transfert de ce correcteur ne sera pas donnée dans ce manuscrit. Sur les figures 5.6 et 5.7 sont respectivement représentées les fonctions de sensibilité de l'entrée et de la commande associées au modèle nominal, au modèle incertain et au modèle non entier du système en boucle fermée noté $H_{bf}(s)$, ainsi que les gabarits fréquentiels associés.

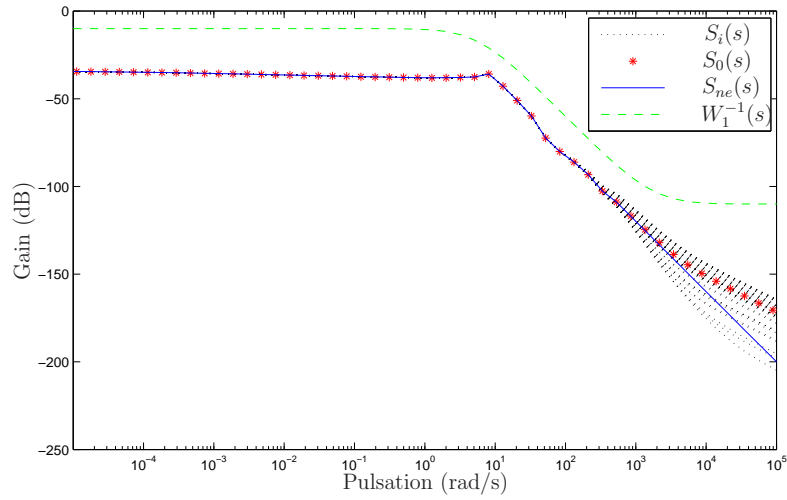


FIGURE 5.6 – Comparaison du filtre $W_1^{-1}(s)$ aux fonctions de sensibilité de l'entrée du modèle nominal notée $S_0(s)$, du modèle non entier notée $S_{ne}(s)$ et du modèle entier incertain $S_i(s)$

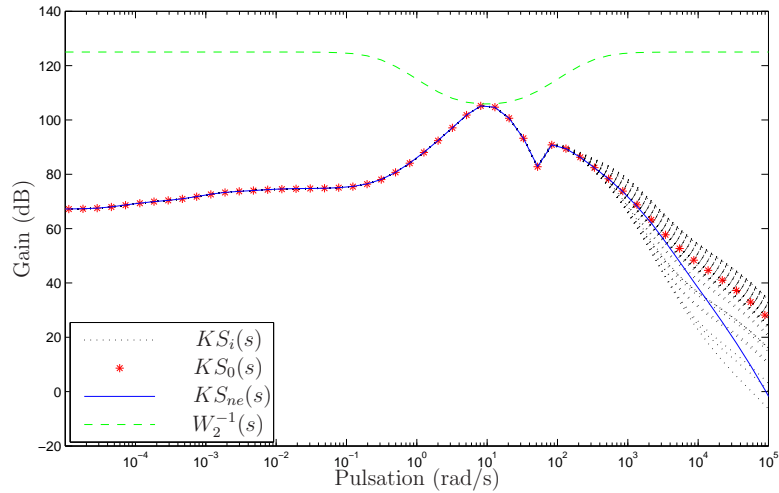


FIGURE 5.7 – Comparaison du filtre $W_2^{-1}(s)$ aux fonctions de sensibilité de la commande du modèle nominal notée $KS_0(s)$, du modèle non entier notée $KS_{ne}(s)$ et du modèle entier incertain $KS_i(s)$

Comme on peut le voir sur les figures 5.6 et 5.7, les contraintes fréquentielles ont

bien été respectées vu que les gains des modèles nominaux, incertains et non entiers sont sous les contraintes $\forall \omega \in \mathbb{R}_+$.

La réponse temporelle du système en boucle fermée a ensuite été comparée à celle du système en boucle ouverte. Pour ce faire, des sismogrammes issus de mesures réelles provenant de la base de données en ligne de l'IRIS (Incorporated Research Institutions for Seismology) [Iri], ont été utilisés comme signaux d'entrée. Le profil d'accélération du séisme du 17 janvier 1994 à Northridge (Sud de la Californie, USA) et enregistré par la station sismique de Pasadena (Californie), est représenté sur la figure 5.8.

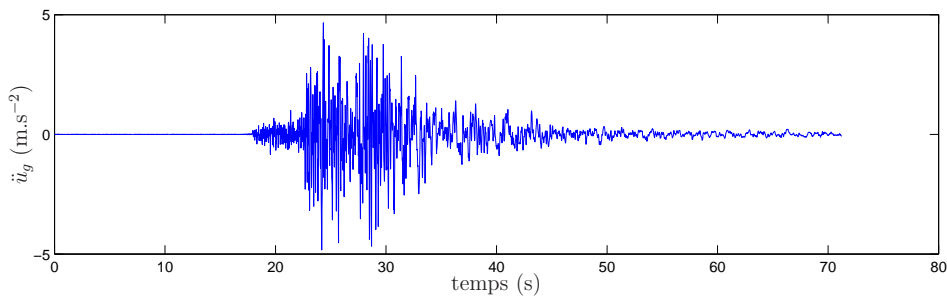


FIGURE 5.8 – Profil d'accélération du séisme de Northridge (17 janvier 1994) en $m.s^{-2}$

L'analyse spectrale de ce profil d'accélération montre, comme on peut le voir sur la figure 5.9, que l'essentiel de l'énergie du signal est bien contenu dans la plage fréquentielle 3 – 10 Hz.

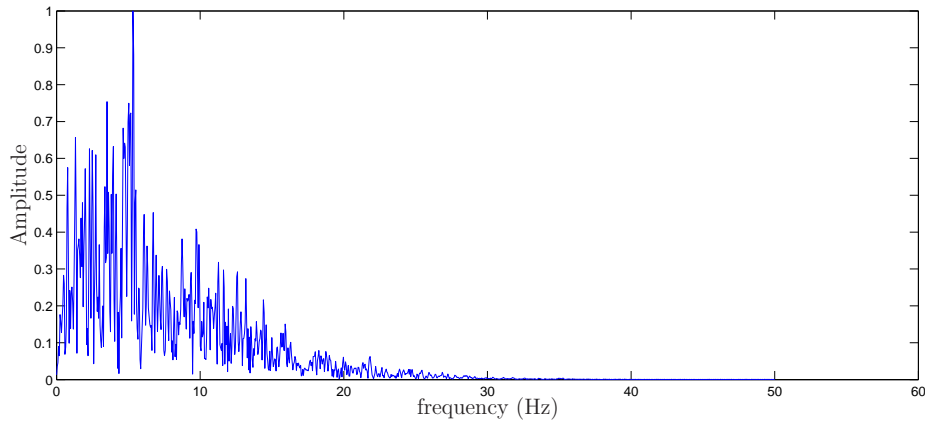


FIGURE 5.9 – Analyse spectrale du profil d'accélération du séisme de Northridge

Le déplacement $u_d(t)$ du plateau du pont et la force de commande $F_{d1}(t)$ correspondant sont respectivement représentés sur les figures 5.10 et 5.11. Ces courbes ont été obtenues en bouclant le modèle non entier initial $H(s)$ par le correcteur $K_{rsd}(s)$. Comme

on peut le voir, le débattement a été réduit de moitié. Le déplacement maximum en boucle ouverte est d'environ 7 cm en boucle ouverte alors qu'il n'est que de 3.4 cm en boucle fermée.

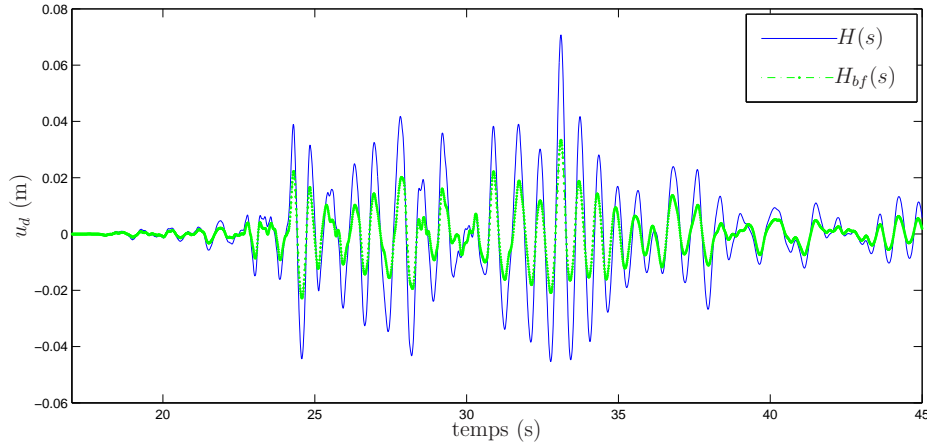


FIGURE 5.10 – Déplacement du plateau (en m), en boucle ouverte (réponse de $H(s)$), et en boucle fermée avec le correcteur $K_{rsd}(s)$ (réponse de $H_{bf}(s)$)

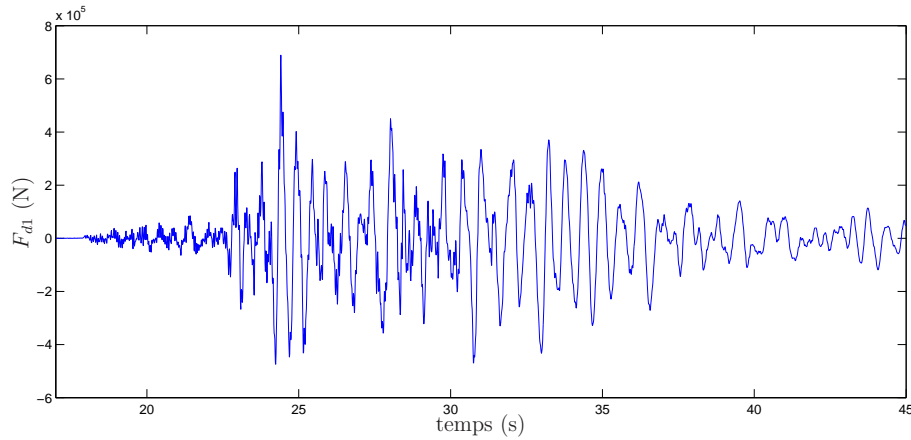


FIGURE 5.11 – Force F_{d1} (en N) générée par l'amortisseur en boucle fermée avec le correcteur $K_{rsd}(s)$

De plus, l'énergie générée par les déplacements du pont en boucle fermée a été réduite de 67% par rapport à celle du modèle initial qui ne comportait qu'un amortissement passif, pour une commande F_{d1} valant au maximum 680 kN environ.

Le correcteur entier $K_{rsd}(s)$ déterminé à partir du modèle entier incertain a donc permis d'imposer des contraintes fréquentielles au modèle non entier initial pour une force de commande F_{d1} d'ordre de grandeur raisonnable [Symans et Kelly, 1999].

Des problèmes de conditionnement numérique ont cependant été rencontrés lors de la synthèse de ce correcteur. En effet, afin de réduire les incertitudes de modèle intervenant dans l'écriture du modèle entier incertain, l'approximation de la partie apériodique $H_{ap}(s)$ du modèle non entier initial $H(s)$ doit être suffisamment précise. Cette précision est obtenue en augmentant le nombre d'intervalles N sur lesquels la méthode des trapèzes est effectuée, augmentant par la même occasion l'ordre du modèle entier nominal obtenu (somme de la partie exponentielle et de la partie apériodique). Des ordres trop élevés entraînent un mauvais conditionnement des matrices de la représentation d'état du modèle nominal, impactant négativement la faisabilité des LMI de synthèse de correcteurs par la méthode H_∞ . Des LMI de synthèse adaptées aux modèles non entiers pourraient permettre d'éviter ces problèmes dus aux approximations. L'une des conditions LMI développées dans le chapitre 4 est donc maintenant appliquée au modèle non entier $H(s)$.

5.4 – Commande H_∞ basée sur la pseudo représentation d'état

Les méthodes de synthèse développées dans le chapitre 4 peuvent être utilisées pour calculer des correcteurs directement à partir de la pseudo représentation d'état du pont (5.8) d'ordre $\nu = 0.25$.

Notre choix s'est porté sur une loi de commande par retour d'état calculée à l'aide de la méthode de synthèse basée sur le lemme KYP. En effet, cette dernière méthode est celle qui présente le moins de pessimisme dans le cas d'un modèle d'ordre commensurable inférieur à 1.

La loi de commande considérée est ainsi de la forme :

$$F_{d1}(t) = K_{re} x(t), \quad (5.40)$$

où $x(t)$ est un vecteur contenant le pseudo état du modèle du pont $x_s(t)$ ainsi que les pseudo états des pondérations $W_1(s)$ et $W_2(s)$ qui apparaissent sur la figure 5.12.

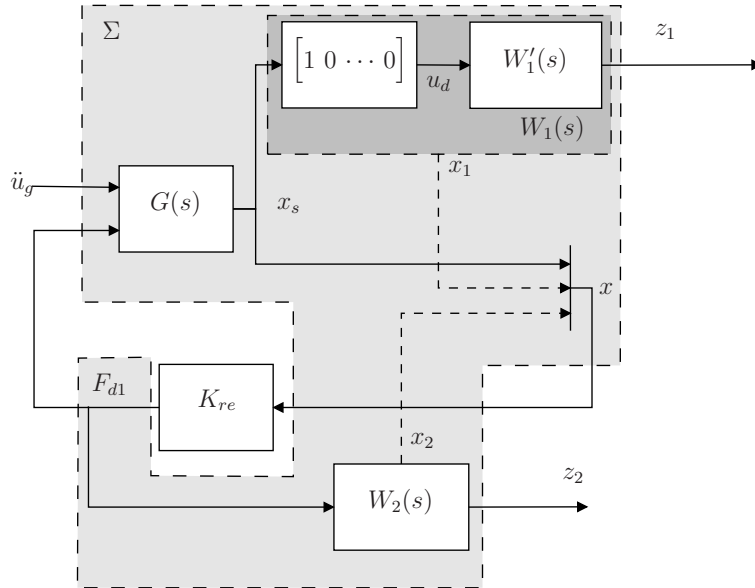


FIGURE 5.12 – Schéma bloc du système en boucle fermée

Le correcteur par retour d'état K_{re} est choisi de sorte à ce que le système bouclé vérifie la contrainte H_∞ suivante :

$$\left\| \begin{array}{c} W_1(s)T_{x_s \ddot{u}_g}(s) \\ W_2(s)T_{F_{d1} \ddot{u}_g}(s) \end{array} \right\|_{H_\infty} < 1. \quad (5.41)$$

Si la relation (5.41) est vérifiée, alors :

$$|T_{F_{d1}\ddot{u}_g}(j\omega)| < |W_2^{-1}(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (5.42)$$

W_2^{-1} impose donc une contrainte sur la force exercée par l'amortisseur du premier pilier F_{d1} suite à une sollicitation du sol \ddot{u}_g . Ici, $W_2(s) = 3.8 \cdot 10^{-6}$.

Si la relation (5.41) est vérifiée, on a également :

$$\|W_1(s)T_{x_s\ddot{u}_g}(s)\|_{H_\infty} < 1 \quad (5.43)$$

soit :

$$\left\| W_1'(s) \begin{bmatrix} 1 & 0_{1 \times 24} \end{bmatrix} T_{x_s\ddot{u}_g}(s) \right\|_{H_\infty} < 1 \quad (5.44)$$

ou encore :

$$\|W_1'(s)T_{u_d\ddot{u}_g}(s)\|_{H_\infty} < 1. \quad (5.45)$$

Si la relation (5.45) est vérifiée, alors :

$$|T_{u_d\ddot{u}_g}(j\omega)| < |W_1'^{-1}(j\omega)|, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (5.46)$$

$W_1'^{-1}$ impose donc une contrainte sur le déplacement du plateau u_d suite à une sollicitation du sol \ddot{u}_g . Comme précédemment, le gain du filtre $W_1'^{-1}(s)$ est choisi suffisamment bas pour au minimum réduire de moitié les déplacements du plateau du pont. $W_1'^{-1}(s)$ est ainsi défini par :

$$W_1'^{-1}(s) = \frac{12.6(s^{0.25} + 1.5)}{s^{0.25} + 2.6}. \quad (5.47)$$

W_1 admet une pseudo représentation d'état

$$W_1 \begin{cases} D^\nu x_1(t) &= A_1 x_1(t) + B_1 x_s(t) \\ z_1(t) &= C_1 x_1(t) + D_1 x_s(t) \end{cases} \quad (5.48)$$

avec $A_1 = -2.6$, $B_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0_{1 \times 24} \end{bmatrix}$, $C_1 = -3.7$ et $D_1 = \begin{bmatrix} 12.6 & 0_{1 \times 24} \end{bmatrix}$.

Le modèle augmenté Σ , tel qu'indiqué sur la figure 5.12, admet la pseudo représentation d'état

$$\Sigma \begin{cases} D^\nu x(t) &= A x(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{zu} u(t) + D_{zw} w(t) \end{cases} \quad (5.49)$$

où $w = \ddot{u}_g$, $z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}^T$, $x = \begin{bmatrix} x_s^T & x_1^T \end{bmatrix}^T$ et :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ B_1 & A_1 \end{bmatrix}, \quad B_u = \begin{bmatrix} B_{s2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} B_{s1} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_z &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D_1 & C_1 \end{bmatrix}, \quad D_{zu} = W_2 \quad \text{et} \quad D_{zw} = 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Ce modèle augmenté permet de définir le problème standard de la figure 5.13.

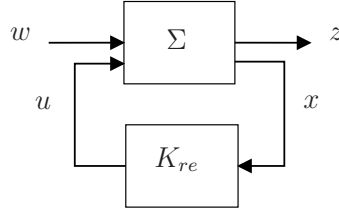


FIGURE 5.13 – Problème standard de synthèse d'un retour d'état H_∞

Le théorème 4.4.3, permettant la synthèse de lois de commande H_∞ par retour d'état statique, est maintenant appliqué au modèle Σ de sorte à trouver un gain K_{re} de retour d'état vérifiant la contrainte :

$$\|F_l(\Sigma, K_{re})\|_\infty < 1. \quad (5.51)$$

En utilisant le solveur SDPT3 [Toh *et al.*, 1998] pour résoudre la LMI (4.146), le correcteur suivant est obtenu :

$$\begin{aligned}
 K_{re} = & 1 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} -2.3047 & -6.0612 & -2.7170 & -1.5440 & -0.9488 & -0.5722 \\ -0.3164 & -0.1378 & 6.8746 & 8.0101 & 2.8628 & 0.9726 & 0.3182 & 0.0782 \\ 0.0082 & -0.0059 & -2.2685 & -1.0738 & -0.4342 & -0.1555 \\ -0.0483 & -0.0117 & -0.0012 & 0.0009 & 0.0000 & 0.1007 \end{bmatrix}. \quad (5.52)
 \end{aligned}$$

Le lieu des valeurs propres de la matrice de pseudo état en boucle fermée $A + BK_{re}$, représenté sur la figure 5.14, confirme que le système bouclé Σ_{bf} est stable. En effet, toutes les valeurs propres appartiennent au domaine de stabilité défini par l'équation (2.4).

De plus, on peut constater sur la figure 5.15 que les contraintes (5.42) et (5.46) sont bien vérifiées sur toute la plage fréquentielle.

La réponse temporelle du système en boucle fermée a ensuite été comparée à celle du système en boucle ouverte en utilisant de nouveau le profil d'accélération du séisme du 17 janvier 1994 à Northridge (Sud de la Californie, USA), enregistré par la station sismique de Pasadena (Californie), et représenté sur la figure 5.8. Les figures 5.16 et 5.17, quant à elles, montrent respectivement le déplacement correspondant du plateau du pont u_d et la force F_{d1} générée par l'amortisseur.

Comme on peut le voir sur la figure 5.16, l'amplitude des déplacements du plateau a été réduite de plus de la moitié. En effet, le déplacement maximum en boucle ouverte est d'environ 7 cm, tandis qu'en boucle fermée, le plateau ne se déplace que de 2.5 cm

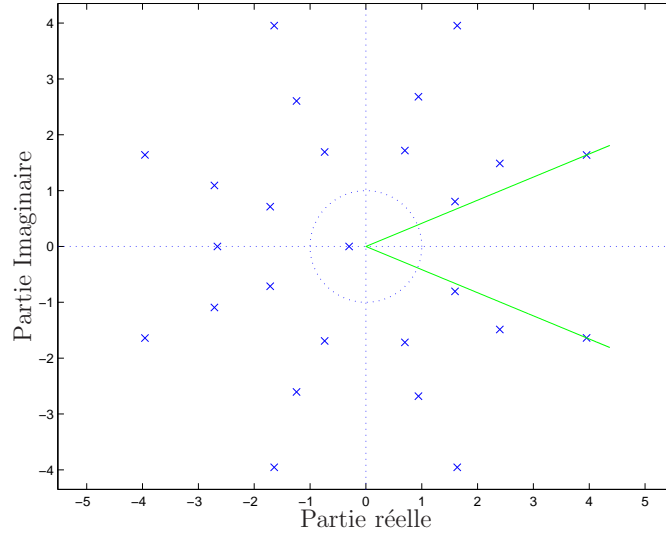


FIGURE 5.14 – Valeur propres (\times) de la matrice $A + BK_{re}$ et limites du domaine de stabilité (demi-droites)

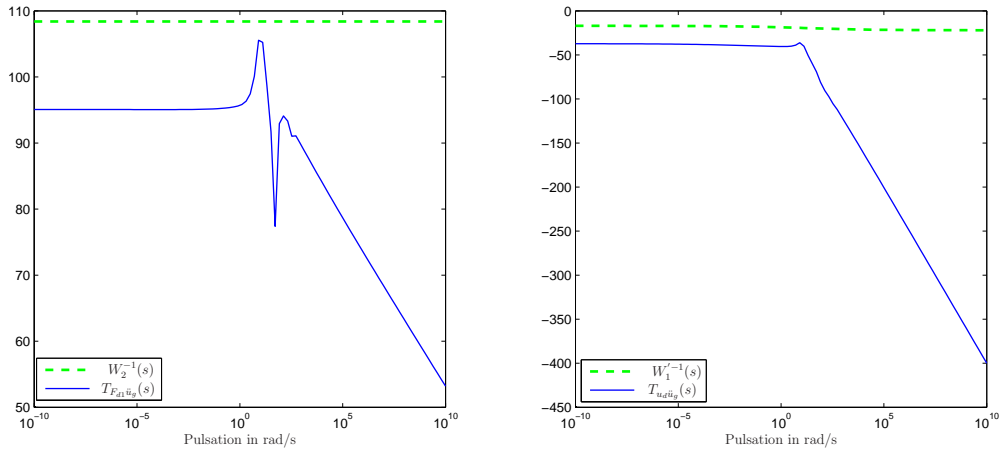


FIGURE 5.15 – Gains des fonctions de sensibilité $T_{F_{d1}\ddot{u}_g}(s)$ et $T_{u_d\ddot{u}_g}(s)$ et pondérations $W_1'^{-1}(s)$ et $W_2^{-1}(s)$

maximum. De plus, l'énergie générée par les déplacements du pont avec le correcteur H_∞ a été réduite de 64% par rapport à celle du système initial qui ne comportait qu'un amortissement passif.

Enfin, la force F_{d1} générée par l'amortisseur à fluide vaut au maximum 210 kN. Le déplacement u_d a donc été réduit de plus de la moitié avec une commande F_{d1} inférieure à celle obtenue dans le paragraphe 5.3 en écrivant le modèle non entier $H(s)$ comme un modèle entier incertain.

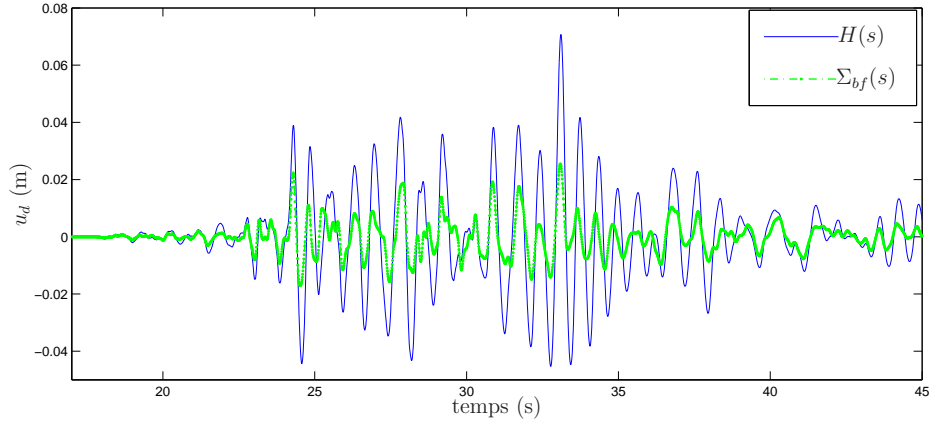


FIGURE 5.16 – Déplacement du plateau (en m), en boucle ouverte (réponse de $H(s)$), et en boucle fermée avec le correcteur K_{re} (réponse de $\Sigma_{bf}(s)$)

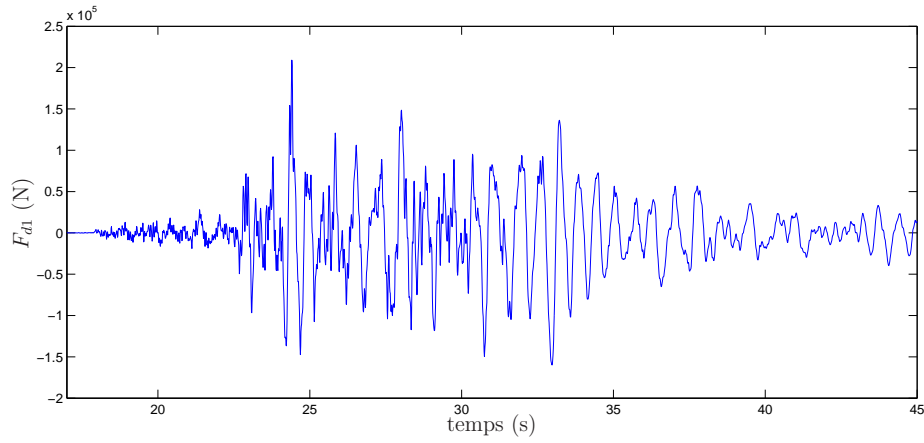


FIGURE 5.17 – Force F_{d1} (en N), générée par l'amortisseur en boucle fermée avec le correcteur K_{re}

5.5 – Conclusion

Dans ce chapitre, les approches présentées dans les chapitres 3 et 4 ont été appliquées à un système complexe : un pont monté sur des cales visco-élastiques, modélisé par un modèle non entier et soumis à des excitations sismiques.

La commande du système par retour de sortie dynamique a d'abord été effectuée en écrivant le modèle non entier comme un modèle entier incertain, à l'image des développements présentés au chapitre 3. Une commande par retour d'état du système a ensuite été effectuée en utilisant une des conditions LMI de synthèse adaptées aux modèles non entiers et proposées au chapitre 4.

Bien que le cahier des charges a été respecté dans les deux cas, de meilleurs performances ont été obtenues en utilisant les conditions LMI développées pour les modèles non entiers. En effet, l'ordre élevé du modèle nominal issu de la décomposition du modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique entraîne un mauvais conditionnement numérique des matrices de la représentation d'état du modèle augmenté. De ce fait, les performances des algorithmes de résolution des LMI ont donc été dégradées. Le développement de méthodes de synthèse H_∞ adaptées aux modèles non entiers est donc bien justifié.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Le chapitre 1 a été consacré à la description des opérateurs de dérivation et d'intégration non entière et à leur utilisation pour la modélisation de systèmes dynamiques. Il a été montré que les propriétés inhérentes à ces opérateurs les rendent particulièrement aptes à décrire des phénomènes physiques à mémoire longue tels que les phénomènes de diffusion. L'analyse des propriétés des modèles non entiers a ensuite révélé que seuls les modèles non entiers commensurables peuvent être décrits par une pseudo représentation d'état. Cette représentation est similaire en écriture à celle des modèles entiers mais doit être manipulée avec précaution lorsqu'il s'agit de calculer la réponse à des conditions initiales ou d'étudier les propriétés liées à l'état telles que la stabilité interne, la commandabilité ou l'observabilité. Le pseudo vecteur d'état n'a en effet pas les propriétés d'un vecteur d'état au sens des modèles entiers. La décomposition des modèles non entiers en leur partie exponentielle et leur partie apériodique, présentée ensuite, a permis de faire apparaître leur véritable vecteur d'état qui est de dimension infinie. Ce chapitre s'est achevé sur l'approximation par pôles et zéros récursifs des modèles non entiers, approximation qui est utilisée dans ce travail pour effectuer des simulations temporelles.

Le chapitre 2 débute par la définition et la caractérisation de la stabilité des modèles non entiers. Il rappelle en particulier que la stabilité interne d'un modèle non entier commensurable peut être évaluée par la position dans le plan complexe des valeurs propres de sa pseudo matrice d'état. L'utilisation de la norme H_∞ pour évaluer les performances des modèles non entiers a ensuite été présentée. Cette partie a aussi permis de montrer que l'interprétation physique de la norme H_∞ est la même pour les modèles entiers et les modèles non entiers. Après la formalisation des problèmes à résoudre lors de la synthèse H_∞ pour des modèles non entiers, les deux approches proposées dans ce mémoire ont été présentées. La première approche consiste à approximer le modèle non entier par un modèle entier

incertain issu de sa décomposition en partie exponentielle et partie apériodique. La seconde approche repose sur l'utilisation de la pseudo représentation d'état pour étendre aux modèles non entiers, différentes méthodes de synthèse H_∞ développées pour les modèles entiers.

Dans le chapitre 3, la méthode de synthèse H_∞ basée sur l'approximation du modèle non entier par un modèle entier incertain à partir de sa décomposition en une partie exponentielle et une partie apériodique a été présentée. Pour réaliser cette approximation, la partie apériodique a été approximée en utilisant une procédure d'intégration numérique basée sur la méthode des trapèzes. L'erreur relative générée par cette méthode a été prise en compte sous la forme d'une incertitude multiplicative affectant un modèle nominal entier. Il a ensuite été montré que le modèle incertain permet d'évaluer la stabilité du modèle non entier et ses performances par le calcul de la norme H_∞ d'un modèle augmenté. Ce modèle augmenté est ensuite utilisé pour calculer des correcteurs permettant au modèle non entier d'atteindre des objectifs de performances. Un exemple académique a finalement montré l'efficacité de la méthode proposée.

Le chapitre 4 est dédié à la formulation de conditions LMI pour la commande H_∞ de modèles non entiers décrits par une pseudo représentation d'état. Pour ce faire, des conditions LMI permettant d'analyser la BIBO stabilité de ces modèles ont d'abord été proposées. Ces conditions reposent sur une analyse algébrique de ces modèles, une caractérisation géométrique du domaine de stabilité ou du domaine d'instabilité ou enfin sur l'utilisation du formalisme des régions LMI généralisées (GLMI) pour contourner le problème de non convexité du domaine de stabilité pour un ordre commensurable ν compris entre 0 et 1. Des conditions LMI permettant d'évaluer les performances des modèles non entiers grâce à la norme H_∞ de certains transferts ont ensuite été développées. Celles-ci reposent principalement sur l'étude de la pseudo matrice hamiltonnienne H_γ d'un modèle non entier et sur l'utilisation du lemme KYP généralisé. Ces analyses en stabilité et en performances des modèles non entiers ont finalement permis de développer des conditions LMI de synthèse H_∞ par retour de pseudo état et par retour de sortie dynamique. Contrairement à la méthode proposée dans le chapitre 3, ces conditions LMI permettent de calculer directement la norme H_∞ à partir des matrices de la pseudo représentation d'état.

Enfin, le dernier chapitre a consisté à appliquer les différentes méthodes développées dans ce mémoire à la commande H_∞ d'une maquette de pont modélisée par un modèle

non entier et soumise à des excitations sismiques. Après l'établissement du modèle, des correcteurs H_∞ par retour de sortie dynamique ont été calculés sur la base d'un modèle entier incertain déterminé à l'aide de la méthodologie présentée dans le chapitre 3. Les conditions LMI de synthèse de correcteurs H_∞ par retour d'état développées dans le chapitre 4 ont également été appliquées directement au modèle non entier du pont décrit par sa pseudo représentation d'état. Ces deux méthodes ont permis au système bouclé de remplir le cahier des charges imposé, ce qui a été validé en simulation à l'aide de données sismiques réelles.

Perspectives

Cette thèse a permis d'élaborer une méthodologie de synthèse H_∞ adaptée aux modèles non entiers commensurables. Les deux approches proposées ont permis de répondre à la problématique, mais elles présentent tout de même certaines limitations qui conduisent à proposer des perspectives.

En effet, la méthode basée sur l'écriture d'un modèle incertain à l'aide de la décomposition d'un modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique est une approche essentiellement numérique dans le cadre de cette thèse. Elle nécessite en effet le calcul manuel des majorants au niveau des deux bornes de l'intégrale définissant la partie apériodique. Elle nécessite aussi d'évaluer numériquement l'erreur relative issue de la méthode des trapèzes, bien qu'une expression analytique d'un majorant soit possible. Par ailleurs, le majorant de l'erreur relative est lui-même majoré par un filtre utilisé pour représenter l'incertitude dynamique, introduisant à nouveau un certain pessimisme. Outre ces différentes majorations liées à la méthode d'approximation proposée, une telle approche basée sur la reformulation du modèle non entier comme un modèle entier incertain conduit nécessairement à une dégradation des performances atteignables puisqu'une partie de la dynamique intrinsèque du modèle non entier initial, bien que connue, est traitée comme une incertitude. Un compromis apparaît ainsi entre performances atteignables et complexité du modèle entier nominal. En effet, plus le modèle entier nominal est d'ordre élevé, plus l'incertitude de modèle sera réduite et meilleures seront les performances atteignables. Cependant, le coût calculatoire pour la méthode de synthèse du correcteur sera d'autant plus important, ainsi que l'ordre du correcteur trouvé. Au contraire, plus le modèle entier nominal sera d'ordre faible, plus l'incertitude sera importante et les performances atteignables dégradées. La détermination de critères quantitatifs permettant de gérer ce compromis est donc une première perspective pour ce travail, la seconde étant la réduction du pessimisme introduit par les majorations successives.

Les conditions LMI de synthèse H_∞ développées pour les modèles non entiers souffrent quasiment toutes d'un certain pessimisme lorsque l'ordre non entier est compris entre 0 et 1. Les conditions d'analyse les moins pessimistes, obtenues grâce au lemme de KYP, ont fourni des conditions LMI de synthèse uniquement dans le cas d'un retour d'état. Des recherches supplémentaires sont en cours pour trouver un changement de variables linéarisant permettant de formuler le problème de synthèse d'un retour de sortie dynamique à l'aide de LMI. Il s'agit là d'une perspective importante à ce travail.

L'un des inconvénients de la commande H_∞ est le fait que le bloc d'incertitudes associé aux contraintes de performances est toujours considéré plein, ce qui introduit un certain pessimisme. La μ -analyse mériterait donc d'être étendue aux modèles non entiers pour permettre d'alterner des phases de synthèse H_∞ et de μ -analyse afin d'optimiser davantage le réglage de la loi de commande.

Enfin, les méthodes de synthèse H_∞ proposées dans ce mémoire ont uniquement été testées en simulation. Il serait donc intéressant d'évaluer leurs performances sur des systèmes réels jusqu'à implantation finale.

Annexe A

Inégalités Matricielles

Une grande partie des résultats présentés dans cette thèse sont formulés à l'aide d'inégalités matricielles. Les inégalités matricielles permettent de décrire différents problèmes d'optimisation, et comme le montre l'ouvrage de référence [Boyd *et al.*, 1994], un bon nombre de problèmes d'Automatique se formulent naturellement dans ce cadre. Cet annexe est consacré à la description de ce formalisme mathématique.

A.1 – Inégalités Matricielles

Les inégalités matricielles reposent essentiellement sur les notions de définie positivité et semi-définie positivité.

Définition A.1.1 (Définie Positivité)

Une matrice symétrique $M \in \mathbb{S}_n$ est définie positive (semi-définie positive) si, et seulement si, elle vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, x^T A x > (\geq) 0$
2. *toutes les valeurs propres λ_i de M sont positives (supérieures ou égales à zéro) :*

$$\lambda_i(A) > (\geq) 0 \quad \forall i = 1 \cdots n$$

Bien qu'existant pour des matrices quelconques, cette définition a volontairement été réduite au cas des matrices symétriques. Si les matrices sont quelconques, la définition s'applique uniquement à leur partie symétrique.

Les inégalités matricielles sont définies à l'aide de la relation d'ordre partiel de Löwner.

Définition A.1.2 (Inégalité Généralisée)

Une matrice $A \in \mathbb{S}_n$ est supérieure (supérieure ou égale) à une matrice $B \in \mathbb{S}_n$ si, et seulement si, la matrice $A - B$ est définie (semi-définie) positive :

$$A > (\geq) B \iff A - B > (\geq) \mathbf{0} \quad (\text{A.1})$$

Définition A.1.3 (Inégalité Matricielle)

Une inégalité matricielle désigne une contrainte sur une variable $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ de la forme :

$$MI(\mathbf{x}) > (\geq) \mathbf{0} \quad (\text{A.2})$$

Selon que la matrice $MI(\mathbf{x})$ est définie positive ou semi-définie positive, l'inégalité matricielle sera dite stricte ou non stricte. L'ensemble des variables \mathbf{x} satisfaisant une inégalité matricielle est appelé l'ensemble faisable. Selon que cet ensemble est vide ou non vide, l'inégalité matricielle sera dite faisable ou non faisable.

Si la matrice $MI(\mathbf{x})$ est affine en les variables \mathbf{x} , l'inégalité matricielle est linéaire et sera notée $LMI(\mathbf{x})$.

Définition A.1.4 (Inégalité Matricielle Linéaire - LMI)

Une inégalité matricielle linéaire est une inégalité matricielle de la forme :

$$LMI(\mathbf{x}) = F_0 + \sum_{i=1}^m F_i \mathbf{x}_i > (\geq) \mathbf{0} \quad (\text{A.3})$$

où $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_m \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m$ est la variable et les matrices $F_i \in \mathbb{S}_n$, $i = 0 \cdots m$ sont des matrices symétriques connues.

Un autre type d'inégalité matricielle connue sont les inégalités matricielles bilinéaires, notées $BMI(\mathbf{x})$.

Définition A.1.5 (Inégalité Matricielle Bilineaire - BMI)

Une inégalité matricielle bilinéaire est une inégalité matricielle de la forme :

$$BMI(\mathbf{x}) = F_0 + \sum_{i=1}^m F_i \mathbf{x}_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=i}^m G_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j > (\geq) \mathbf{0} \quad (\text{A.4})$$

où $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_m \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^m$ est la variable et les matrices $F_i \in \mathbb{S}_n$, $i = 0 \cdots m$ et $G_{ij} \in \mathbb{S}_n$, $i = 1 \cdots m$, $j = 1 \cdots m$ sont des matrices symétriques connues.

Les relations (A.3) et (A.4) utilisées pour décrire la forme générale des LMI et BMI font intervenir des variables regroupées au sein d'un vecteur unique \mathbf{x} . Cette notation est habituellement utilisée par la communauté de l'optimisation.

Les Automatiens préfèrent généralement utiliser des variables matricielles \mathbf{X}_i . Les problèmes LMI et BMI sont alors notés $\text{LMI}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k)$ et $\text{BMI}(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_k)$. Il est toujours possible de reformuler ces problèmes sous la forme (A.3) ou (A.4), les éléments des matrices \mathbf{X}_i étant alors rangés dans le vecteur \mathbf{x} .

A.2 – Problèmes à base d'inégalités matricielles

Deux problèmes à base d'inégalités matricielles sont rencontrés dans ce mémoire : les problèmes de faisabilité et d'optimisation sous contraintes d'inégalités matricielles.

Définition A.2.1 (Problème de faisabilité)

Trouver $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ satisfaisant l'inégalité matricielle :

$$MI(\mathbf{x}) > (\geq) \mathbf{0}$$

Définition A.2.2 (Problème d'optimisation)

Minimiser un objectif linéaire sous des contraintes d'inégalités matricielles :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m} \quad & c' \mathbf{x} \\ \text{sous :} & \\ & MI(\mathbf{x}) > (\geq) \mathbf{0} \end{aligned} \tag{A.5}$$

L'ensemble faisable d'une LMI étant convexe, les problèmes de faisabilité et d'optimisation sous contraintes LMI entrent dans la classe des problèmes d'optimisation convexe. Un des intérêts majeurs de ce type de problème d'optimisation est qu'il existe des algorithmes de résolution très efficaces permettant de calculer l'optimum **global** en **temps polynomial** (le problème est résolu avec une précision donnée à l'aide d'un nombre d'opérations n'excédant pas un polynôme des dimensions du problème). Nous citons en particulier les algorithmes basés sur des méthodes de point intérieur et leurs solveurs associés (SeDuMi, LMILab, SDPT3, SDPA, CSDP, DSDP... [Arzelier, 2002]) permettant de traiter des problèmes de taille relativement importante. Il existe différentes boîtes à outils assurant l'interface de ces solveurs avec MATLAB®. Parmi elles, nous citerons en particulier YALMIP [Löfberg, 2004] qui présente l'avantage de pouvoir programmer la

plupart des opérateurs linéaires de MATLAB[®] (trace, addition, indexation, concaténation, ...) et d'être compatible la plupart des solveurs LMI.

Contrairement aux problèmes LMI, il n'existe pas d'algorithme permettant de calculer systématiquement la solution globale à un problème BMI. Il est même prouvé [Toker et Ozbay, 1995] que le problème de faisabilité associé à un ensemble de contraintes BMI est NP-difficile. Il existe cependant différents algorithmes permettant de traiter les problèmes BMI de faible taille. Ces algorithmes, bien que ne garantissant pas une convergence vers une solution (locale ou globale), peuvent en pratique fournir de bons résultats.

Il apparaît donc préférable, lorsque cela est possible, de formuler les problèmes de manière LMI.

Annexe B

Kalman-Yakubovič-Popov (KYP)

Le lemme généralisé de Kalman-Yakubovič-Popov (KYP) [Iwasaki et Hara, 2005] est un résultat très important pour l'étude et la commande des systèmes dynamiques et en traitement du signal. En effet, différentes propriétés des systèmes dynamiques peuvent être caractérisées par des contraintes inégalitaires dans le domaine fréquentiel. Le lemme KYP généralisé permet de relier de telles contraintes inégalitaires à des inégalités matricielles linéaires (LMI). Les paragraphes suivants présentent le lemme KYP généralisé ainsi qu'une version modifiée.

B.1 – Lemme KYP généralisé

Lemme B.1.1 (Kalman-Yakubovič-Popov (KYP) [Iwasaki et Hara, 2005])

Soient les matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $\Theta \in \mathbb{H}_{n_u}$, $\Phi \in \mathbb{H}_2$ et $\Psi \in \mathbb{H}_2$. Soit l'ensemble Λ défini par

$$\Lambda(\Phi, \Psi) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \right\}. \quad (\text{B.1})$$

Considérons les hypothèses suivantes :

1. si $H(\lambda) = (\lambda I_n - A)^{-1} B$, alors

$$\begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \lambda \in \Lambda ; \quad (\text{B.2})$$

2. il existe $P, Q \in \mathbb{H}_n$, $Q > 0$ telles que

$$\begin{bmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{bmatrix} + \Theta < 0. \quad (\text{B.3})$$

(2) \Rightarrow (1) est toujours vrai. Si de plus, Λ représente une courbe dans le plan complexe, alors (2) \Leftrightarrow (1). ■

B.2 – Modification du lemme KYP généralisé

Cette modification a été proposé dans [Liang et al., 2013].

Lemme B.2.1 ([Liang et al., 2013]) *Si l'ensemble $\Lambda(\Phi, \Psi)$ du lemme 4.3.9 est remplacé par l'ensemble $\Upsilon(\Phi, \Psi)$ défini par*

$$\Upsilon(\Phi, \Psi) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \right\} \quad (\text{B.4})$$

alors la condition (B.2) est vraie $\forall \lambda \in \Upsilon$ s'il existe des matrices $P, Q > 0$ vérifiant la condition LMI (B.3). ■

Preuve Supposons qu'il existe des matrices P et $Q > 0$ vérifiant la LMI (B.3). Alors :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \begin{bmatrix} A & B \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

est équivalent à :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \otimes H(\lambda) \right)^* (\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q) \left(\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \otimes H(\lambda) \right) \\ & + \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \right) H^*(\lambda) P H(\lambda) + \left(\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \right) H^*(\lambda) Q H(\lambda) \\ & + \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} H(\lambda) \\ I_{n_u} \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Tous les $\lambda \in \Upsilon$ vérifient :

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{B.8})$$

et

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (\text{B.9})$$

Ainsi, sachant que P et Q sont définies positives, on a :

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \right) H^*(\lambda) P H(\lambda) + \left(\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} \right) H^*(\lambda) Q H(\lambda) > 0. \quad (\text{B.10})$$

On conclut que la relation (B.2) est vraie $\forall \lambda \in \Upsilon$ en combinant les LMI (B.7) et (B.10).

Bibliographie

- [Iri] Incorporated Research Institutions for Seismology (IRIS) database. URL <http://www.iris.edu/hq/>.
- [Aoun, 2005] M. AOUN. *Systèmes linéaires non entiers et identification par bases orthogonales non entières*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, Talence, 2005.
- [Arzelier, 2002] D. ARZELIER. Lecture on semidefinite programming. LAAS-CNRS - CTUV, Prague, avril 2002. URL : <http://www.laas.fr/~sk/cutsdp/>.
- [Bachelier, 1998] O. BACHELIER. *Commande des systèmes linéaires incertains : placement de pôles robuste en D-stabilité*. Thèse de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées, 1998.
- [Bachelier et Pradin, 1999] O. BACHELIER et B. PRADIN. Bounds for uncertain matrix root-clustering in a union of subregions. *Int. J. Robust Nonlin.*, 9:333–359, 1999.
- [Balas et al., 2007] G. BALAS, R. CHIANG, A. PACKARD et M. SAFONOV. *Robust Control Toolbox 3 User's Guide*. Natick, MA, septembre 2007. URL http://mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/robust/robust.pdf.
- [Battaglia et al., 2001] J.-L. BATTAGLIA, O. COIS, L. PUIGSEGUR et A. OUSTALOUP. Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 44(14):2671–2680, 2001.
- [Benner et al., 1997] P. BENNER, V. MEHRMANN, V. SIMA, S. Van HUFFEL et A. VARGA. Slicot - a subroutine library in systems and control theory. *Applied and Computational Control, Signals, and Circuits*, pages 499–539. Birkhäuser, 1997.
- [Bonnet et Partington, 2000] C BONNET et J.R. PARTINGTON. Coprime factorizations and stability of fractional differential systems. *Systems and Control Letters*, 41(3):167–174, 2000.

- [Boyd *et al.*, 1989] S. BOYD, V. BALAKRISHNAN et P. KABAMBA. A bisection method for computing the h_∞ norm of a transfer matrix and related problems. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 2(3):207–219, 1989.
- [Boyd *et al.*, 1994] S. BOYD, L. EL GHAOU, E. FERON et V. BALAKRISHNAN. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Stud. Appl. Math., Philadelphia, 1994.
- [Campbell *et al.*, 2009] S. L. CAMPBELL, J. P. CHANCELIER et R. NIKOUKHAH. *Modeling and Simulation in Scilab/Scicos with ScicosLab 4.4*. Springer, 2009.
- [Caputo, 1967] M. CAPUTO. Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent - II. *Int. Geophysical J.*, 13(5):529–539, mai 1967.
- [Chilali, 1996] M. CHILALI. *Méthodes LMI pour la synthèse multicritère*. Thèse de doctorat, Université de Paris IX Dauphine, 1996.
- [Cois, 2002] O. COIS. *Systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : application en thermique*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1, France, 2002.
- [Desoer et Vidyasagar, 1975] C. A. DESOER et M. VIDYASAGAR. *Feedback systems : input-output properties*. Academic press, New York, 1975.
- [Dinzart et Lipiński, 2009] F. DINZART et P. LIPIŃSKI. Improved five-parameter fractional derivative model for elastomers. *Archives of Mechanics*, 61(6):459 – 474, 2009.
- [Doyle, 1983] J. DOYLE. Synthesis of robust controllers and filters. *Conference on Decision and Control*, pages 109–114, San Antonio, Texas, USA, décembre 1983.
- [Duc et Font, 1999] Gilles DUC et Stéphane FONT. *Commande $H[\text{infini}]$ et $[\mu]$ -analyse : des outils pour la robustesse*. Collection pédagogique d’automatique. Hermès sciences, Paris, 1999.
- [Dugowson, 1994] S. DUGOWSON. *Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l’ordre de dérivation*. Thèse de doctorat, Université Paris XIII, 12 1994.
- [Enacheanu, 2008] O. ENACHEANU. *Modélisation fractale des réseaux électriques*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2008.

- [Farges *et al.*, 2010] C. FARGES, M. MOZE et J. SABATIER. Pseudo-state feedback stabilization of commensurate fractional order systems. *Automatica*, 46(10):1730–1734, 2010.
- [Fortin, 2001] A. FORTIN. *Analyse numérique pour ingénieurs*. Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 2001.
- [Gahinet et Apkarian, 1994] P. GAHINET et P. APKARIAN. A linear matrix inequality approach to h_∞ control. *International journal of robust and nonlinear control*, 4(4):421–448, 1994.
- [Green et Limebeer, 1995] M. GREEN et D. J. N. LIMEBEER. *Linear robust control*. Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1995.
- [Grünwald, 1867] A.K. GRÜNWALD. Ueber begrenzte derivationen und deren anwendung. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, pages 441–480, 1867.
- [Héleschewitz, 2000] D. HÉLESCHEWITZ. *Analyse et simulation de systèmes différentiels fractionnaires et pseudo-différentiels linéaires sous représentation diffusive*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, 2000.
- [Hotzel et Fliess, 1998] R. HOTZEL et M. FLIESS. Gain estimation for fractional linear systems. *Proc. IFAC Conf., System structure and Control*, pages 237–242, Nantes, France, 1998.
- [Iwasaki et Hara, 2005] T. IWASAKI et S. HARA. Generalized KYP lemma : unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1):41–59, 2005.
- [Khalil, 2000] H.K. KHALIL. *Nonlinear Systems*. Pearson Education. Prentice Education International, 2000.
- [Löfberg, 2004] J. LÖFBERG. Yalmip : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *Proceedings of the CACSD Conference*, Taipei, Taiwan, 2004. URL <http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php>.
- [Liang *et al.*, 2013] S. LIANG, C. PENG, C. LIAO et Y. WANG. Improved bounded real lemmas for fractional systems. *Accepted for publication in International Journal of Automation and Computing, 2013*, 2013.

- [Liouville, 1832] J. LIOUVILLE. Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces équations. *l'école de polytechnique*, 13:71–162, 1832.
- [Lyapunov, 1892] A. LYAPUNOV. *The general problem of the stability of motion*. Thèse de doctorat, University of Moscow, 1892.
- [Mainardi, 2010] F. MAINARDI. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity : An Introduction to Mathematical Models*. World Scientific Publishing Company, Incorporated, 2010. ISBN 9781848163300.
- [Malti et al., 2011] R. MALTI, P. MELCHIOR et P. LANUSSE. Towards an object oriented CRONE toolbox for fractional differential systems. *18th IFAC World Congress*, Milan, Italy, 2011.
- [Matignon, 1996] D. MATIGNON. Stability results on fractional differential equations with applications to control processing. *Computational Engineering in Systems Applications*, volume 2, pages 963–968, Lille, juillet 1996.
- [Matignon, 1998] D. MATIGNON. Stability properties for generalized fractional differential systems. *Proceedings of the colloquium FDS'98 - Fractional Differential Systems : Models, Methods and Applications*, volume 5, pages 145–158, Paris, France, 1998.
- [Matignon et al., 1993] D. MATIGNON, B. D'ANDRÉA-NOVEL, Ph. DEPALLE et A. OUSTALOUP. Viscothermal losses in wind instruments : a non integer model. *MTNS 93 International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems*, Regensburg, Germany, August 1993.
- [Miller et Ross, 1993] K.S. MILLER et B. ROSS. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons, 1993.
- [Momani et El-Khazali, 2001] S. MOMANI et R. EL-KHAZALI. Stability analysis of composite fractional systems. *Intelligent Systems and Control*, Tampa, Florida, 2001.
- [Montseny, 1998] G. MONTSENY. *Diffusive Representation of Pseudo-differential Time-operators*. LAAS report. LAAS, 1998.
- [Moze, 2007] M. MOZE. *Commande crone des systèmes linéaires à paramètres variants*. Thèse de doctorat, ENSEIRB, Bordeaux, France, 2007.

- [Moze *et al.*, 2005] M. MOZE, J. SABATIER et A. OUSTALOUP. LMI tools for stability analysis of fractional systems. *20th ASME IEDTC/CIE*, Long Beach, California, USA, septembre 2005.
- [Narendra et Taylor, 1973] K. NARENDRA et J. TAYLOR. *Frequency domain criteria for absolute stability*. Electrical Sciences. Academic Press, 1973.
- [Oldham et Spanier, 1974] K.B. OLDHAM et J. SPANIER. *The fractionnal calculus - Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. Academic Press, New-York and London, 1974.
- [Orsoni, 2002] B. ORSONI. *Dérivée généralisée en planification de trajectoire et génération de mouvement*. Thèse de doctorat, LAPS, Université de Bordeaux, 2002.
- [Oustaloup, 1983] A. OUSTALOUP. *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire : Théorie et pratique*. Série Automatique. Masson, 1983.
- [Oustaloup, 1991] A. OUSTALOUP. *La commande CRONE : Commande robuste d'ordre non entier*. Traité des nouvelles technologies. Série Automatique. Hermès, 1991.
- [Oustaloup, 1995] A. OUSTALOUP. *La dérivation non entière : Théorie, synthèse et applications*. Hermès, Paris, 1995.
- [Oustaloup et Mathieu, 1999] A. OUSTALOUP et B. MATHIEU. *La commande CRONE : du scalaire au multivariable*. Hermès, Paris, 1999.
- [Oustaloup *et al.*, 1996] A OUSTALOUP, X MOREAU et M NOUILLANT. The crone suspension. *Control Engineering Practice*, 4(8):1101–1108, 1996.
- [Peaucelle, 2000] D. PEAUCELLE. *Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres*. France, 2000.
- [Remaud et Trigeassou, 2006] P. REMAUD et J. C. TRIGEASSOU. A l'origine de l'automatique : Black, nyquist, bode et les bell laboratories. *CIFA*, Bordeaux, France, 2006.
- [Riemann, 1876] B. RIEMANN. Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration une Differentiation. *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher*, pages 331–344, Leipzig 1876.

- [Rodrigues *et al.*, 2000] S. RODRIGUES, N. MUNICHANDRAIAH et A.-K. SHUKLA. A review of state of charge indication of batteries by means of A.C. impedance measurements. *Journal of Power Sources*, 87:12–20, 2000.
- [Ross, 1977] Bertram ROSS. The development of fractional calculus 1695-1900. *Historia Mathematica*, 4(1):75 – 89, 1977. ISSN 0315-0860.
- [Sabatier *et al.*, 2006] J. SABATIER, M. AOUN, A. OUSTALOUP, G. GRÉGOIRE, F. RAGOT et P. ROY. Fractional system identification for lead acid battery state charge estimation. *Signal Processing*, 86(10):2645–2657, 2006.
- [Sabatier *et al.*, 2012] J. SABATIER, C. FARGES, M. MERVEILLAUT et L. FENETEAU. On observability and pseudo state estimation of fractional order systems. *European Journal of Control*, 18(3):260–271, 2012.
- [Sabatier *et al.*, 2013] J. SABATIER, C. FARGES et J. C. TIGEASSOU. On fractional systems state space description : some wrong ideas and proposed solutions. *Journal of Vibration and Control*, (Accepted on dec. 2012), 2013.
- [Sabatier *et al.*, 2008a] J. SABATIER, P. MELCHIOR et A. OUSTALOUP. A testing bench for fractional order systems education. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 42(6,7,8), 2008a.
- [Sabatier *et al.*, 2010] J. SABATIER, M. MERVEILLAUT, R. MALTI et A. OUSTALOUP. How to impose physically coherent initial conditions to a fractional system? *Com. in Nonlin. Science and Num. Sim.*, 15(5):1318–1326, 2010.
- [Sabatier *et al.*, 2008b] J. SABATIER, M. MOZE et C. FARGES. On stability of fractional order systems. *Third IFAC FDA '08*, Ankara, Turkey, novembre 2008b.
- [Sabatier *et al.*, 2005] J. SABATIER, M. MOZE et A. OUSTALOUP. On fractional systems H_∞ -norm computation. *44th IEEE CDC-ECC'05*, Seville, Spain, décembre 2005.
- [Samko *et al.*, 1993] S.G. SAMKO, A.A. KILBAS et O.I. MARICHEV. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [Sasso *et al.*, 2011] M. SASSO, G. PALMIERI et D. AMODIO. Application of fractional derivative models in linear viscoelastic problems. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 15:367 – 387, 2011.

- [Scherer *et al.*, 1997] C. SCHERER, P. GAHINET et M. CHILALI. Multiobjective output-feedback control via lmi optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42 (7):869–911, 1997.
- [Scherer et Weiland, 2005] C. SCHERER et S. WEILAND. Linear matrix inequalities in control. Rapport technique, Delft University of Technology, 2005.
- [Skelton *et al.*, 1997] R.E. SKELTON, T IWASAKI et D.E. GRIGORIADIS. *A Unified Algebraic Approach To Control Design*. Taylor & Francis systems and control book series. Taylor & Francis, 1997. ISBN 9780748405923.
- [Sommacal *et al.*, 2007] L SOMMACAL, P. MELCHIOR, J.M. CABELGUEN, A. OUSTALOUP et A. IJSPEERT. *Advances in Fractional Calculus Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, chapitre Fractional Multimodels for the Gastrocnemius Muscle for Tetanus Pattern, pages 271–285. Springer, sabatier, j. and agrawal, o. p. and tenreiro machado, j. a. (eds) édition, 2007.
- [Sommacal *et al.*, 2005] L. SOMMACAL, P. MELCHIOR, J.M. CABELGUEN, A. OUSTALOUP et A.J. IJSPEERT. Fractional model of a gastrocnemius muscle for tetanus pattern. *20th ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, ASME IDETC/CIE'05*, California, USA, September 2005.
- [Sommacal *et al.*, 2006] L. SOMMACAL, P. MELCHIOR, J.M. CABELGUEN, A. OUSTALOUP et A.J. IJSPEERT. Fractional multimodels of the gastrocnemius frog muscle. *2nd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Porto, Portugal, July 2006.
- [Symans et Kelly, 1999] M. D. SYMANS et W. S. KELLY. Fuzzy logic control of bridge structures using intelligent semi-active seismic isolation systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 28:37 – 60, 1999.
- [Toh *et al.*, 1998] K. C. TOH, M.J. TODD et R.H. TÜTÜNCÜ. SDPT3 - a matlab software package for semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 11:545–581, 1998.
- [Toker et Ozbay, 1995] O. TOKER et H. OZBAY. On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback. *ACC*, volume 4, pages 2525–2526, Seattle, Washington, USA, juin 1995.

- [Trigeassou et Maamri, 2009] J-C TRIGEASSOU et N. MAAMRI. State space modeling of fractional differential equations and the initial condition problem. *6th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices, IEEE SSD '09*, pages 1–7, Djerba, Tunisia, 2009.
- [Trigeassou et Maamri, 2010] J-C TRIGEASSOU et N. MAAMRI. The initial conditions of riemann-liouville and caputo derivatives : an integrator interpretation. *IFAC FDA'2010*, Badajoz, Spain, 2010.
- [Trigeassou et Maamri, 2011] J.C. TRIGEASSOU et N. MAAMRI. Initial conditions and initialization of linear fractional differential equations. *Signal Processing*, 91(3):427 – 436, 2011.
- [Trigeassou et al., 2011] J.C. TRIGEASSOU, N. MAAMRI, J. SABATIER et A. OUSTALOU. A lyapunov approach to the stability of fractional differential equations. *Signal Processing*, 91(3):437 – 445, 2011.
- [Tsopeles et al., 1996] P. TSOPELAS, M. C. CONSTANTINOU, S. F. OKAMOTO et D. OZAKI. Experimental study of bridge seismic sliding isolation systems. *Engineering Structures*, 18(4):301 – 310, 1996.
- [Weinberger, 1965] H.F. WEINBERGER. *A first course in partial differential equations with complex variables and transform methods*. Blaisdell book in pure and applied mathematics. Blaisdell Pub. Co., 1965.

Bibliographie de l'auteur

Publications dans des revues internationales

- [1] C. FARGES, L. FADIGA et J. SABATIER : H_∞ analysis and control of commensurate fractional order systems. *Mechatronics*, 23(7):772–780, 2013.
- [2] L. LAVIGNE, F. CAZAURANG, L. FADIGA et P. GOUPIL : New sequential probability ratio test : Validation on A380 flight data. *Control Engineering Practice*, 22:1–9, 2014.
- [3] J. SABATIER, C. FARGES et L. FADIGA : Approximation of a fractional order model by an integer order model : a new approach taking into account approximation error as an uncertainty. *Submitted*, 2014.

Communications dans des congrès internationaux

- [1] L. FADIGA, F. CAZAURANG, L. LAVIGNE et P. GOUPIL : Sequential probability ratio test using first laplace distribution for oscillary fault detection of an hydraulic actuator. *In 18th IFAC World Congress*, Milan, Italy, août 2011.
- [2] L. FADIGA, C. FARGES, J. SABATIER et M. MOZE : On computation of H_∞ norm for commensurate fractional order systems. *In 50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, Orlando, Florida, USA, décembre 2011.
- [3] L. FADIGA, C. FARGES, J. SABATIER et M. MOZE : Calcul de la norme H_∞ d'un systme non entier commensurable. *In CIFA '12*, Grenoble, France, 2012.
- [4] L. FADIGA, J. SABATIER et C. FARGES : H_∞ state feedback control of commensurate fractional order systems. *In 6th IFAC FDA '13*, Grenoble, France, février 2013.
- [5] L. FADIGA, C. FARGES et J. SABATIER : H_∞ output feedback control of commensurate fractional order systems. *In ECC'13*, Zürich, Switzerland, 2013.

Résumé

Les études menées permettent d'étendre la méthodologie de commande H_∞ aux modèles décrits par des équations différentielles faisant intervenir des ordres de dérivation non entiers. Deux approches sont proposées. La première consiste à réécrire le modèle non entier comme un modèle entier incertain afin de pouvoir utiliser les méthodes de commande H_∞ développées pour les modèles entiers. La seconde approche consiste à développer des méthodes spécifiques aux modèles non entiers à partir de leur pseudo représentation d'état.

Le **chapitre 1** rappelle les définitions et les propriétés des opérateurs de dérivation et d'intégration non entière. Différentes représentations des modèles non entiers sont ensuite détaillées puis l'approximation par pôles et zéros récursifs, utilisée pour les simulations temporelles, est présentée.

Le **chapitre 2** formalise la problématique de la thèse, à savoir l'élaboration de lois de commande selon des objectifs de performances spécifiés en utilisant la norme H_∞ pour des modèles non entiers. Pour ce faire, un état de l'art des méthodes d'évaluation de la stabilité et des performances des modèles non entiers est d'abord effectué. Puis, après la formalisation des problèmes de commande H_∞ , les approches envisagées pour les résoudre sont évoquées.

Le **chapitre 3** présente la commande H_∞ basée sur l'écriture d'un modèle non entier comme un modèle entier incertain. Ce modèle entier incertain est obtenu par la décomposition de la réponse impulsionnelle du modèle non entier en une partie exponentielle et une partie apériodique. La commande H_∞ du modèle entier incertain est ensuite effectuée, puis un exemple académique illustrant la méthodologie proposée clôture le chapitre.

Le **chapitre 4** présente la commande H_∞ basée sur des modèles non entiers décrits par leur pseudo représentation d'état. Des conditions LMI d'analyse en stabilité et en performance spécifiques aux modèles non entiers sont d'abord proposées. Puis, des conditions LMI de synthèse de correcteurs H_∞ par retour de pseudo état et par retour de sortie sont présentées.

Enfin, le **chapitre 5** est consacré à la validation des méthodes proposées à travers l'isolation vibratoire d'un pont monté sur des cales visco-élastiques et décrit par un modèle non entier.

Mots clés

Dérivation non entière, Commande H_∞ , Pseudo représentation d'état, Inégalités matricielles linéaires, Inégalités de Riccati, Lemme de Kalman-Yakubovič-Popov, Représentation diffusive, Modèles entiers incertains.

Abstract

The general theme of the work enables to extend H_∞ control methodology to fractional order models. Two approaches are proposed. The first one consists in rewriting the fractional order model as an uncertain integer order model in order to use existing H_∞ control methods for integer order models. The second approach consists in developing specific methods for fractional order models based on their pseudo state space representation.

Chapter 1 recalls the definitions and properties of the fractional differentiation and integration operators. Different representations of fractional order models are then presented and the recursive poles and zeros approximation is explained.

Chapter 2 formalizes the thesis topic, namely the development of H_∞ control laws for fractional order models. To do so, a state of the art of fractional order models stability and performance evaluation methods is first made. Then, after formalizing the problems, the considered approaches are evoked.

Chapter 3 is devoted to the H_∞ control based on an uncertain integer order model obtained by decomposing the fractional order model impulse response in an exponential part and an aperiodic part. An academic example closes the chapter.

Chapter 4 presents the H_∞ control based on the pseudo state space representation of a fractional order model. After proposing specific stability and performance LMI conditions for fractional order models, pseudo state feedback and output feedback LMI conditions are derived.

At last, **Chapter 5** is devoted to the validation of the proposed methods through the vibratory isolation of a bridge using elastomeric bearings and described by a fractional order model.

Keywords

Fractional differentiation, H_∞ control, Pseudo state space representation, Linear matrix inequalities, Riccati's inequalities, Kalman-Yakubovič-Popov lemma, Diffusive representation, Uncertain integer order models.